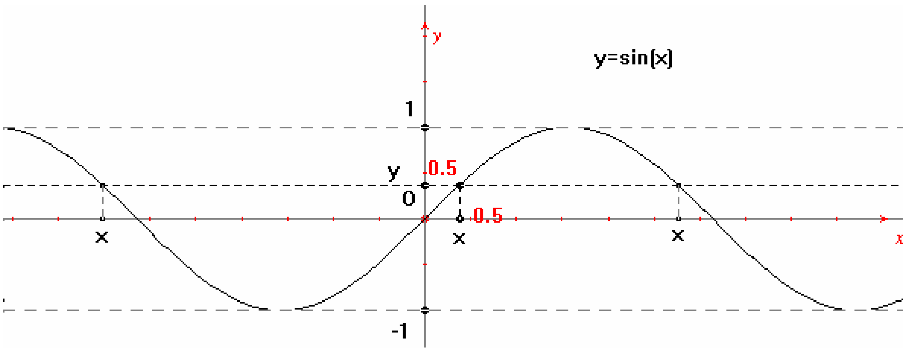
Fonctions trigonométriques réciproques

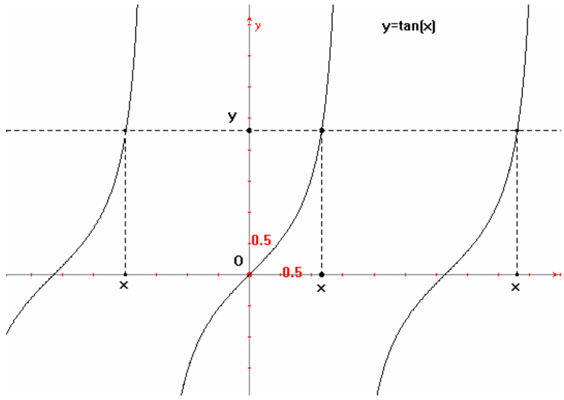
1 Définitions

Les fonctions sinus, cosinus définies de ℝ dans l'intervalle [-1 ;1] sont des applications surjectives par définition, c'est à dire :

$$\forall\, y \in [-1\,;1],\ \exists\, x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \sin(x) = y \text{ et } \cos(x) = y\ .$$



La fonction tangente définie de $\mathbb{R}- \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ \}$ dans ℝ est une application surjective par définition .



A condition de restreindre judicieusement leurs ensembles de définition, on peut définir des fonctions qui sont injectives et par conséquent bijectives.

Pour la fonction sinus, on restreint son domaine de définition à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}\ ;\frac{\pi}{2}]$ et on a :

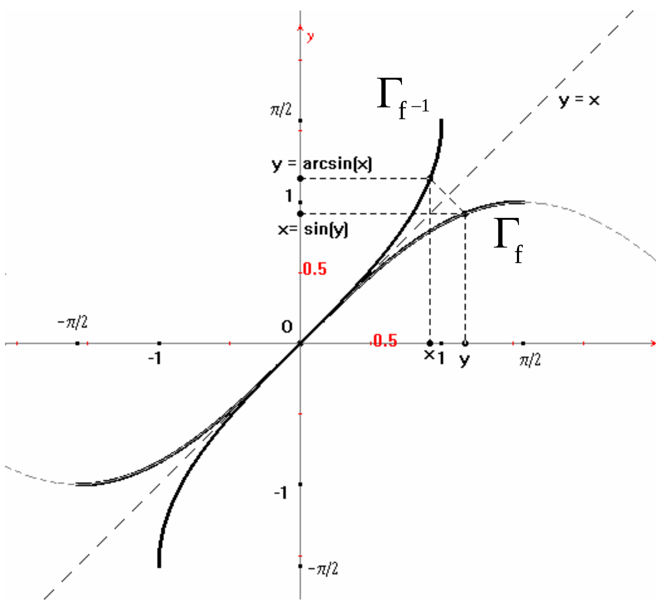
$$\sin :\ [-\tfrac{\pi}{2}\ ;\tfrac{\pi}{2}] \to [-1\ ;1]$$
$$x \mapsto \sin(x)$$

Alors cette fonction " sin " est bijective et on peut définir sa fonction réciproque appelée arc sinus ainsi :

$$\arcsin :\ [-1;1] \to [-\tfrac{\pi}{2}\ ;\tfrac{\pi}{2}]$$
$$x \mapsto \arcsin(x)$$

avec l'équivalence : $\boxed{\mathbf{y = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = \sin(y)}}$

La représentation graphique $\Gamma_{f^{-1}}$ d'une fonction f^{-1}, réciproque d'une application f bijective est toujours symétrique de Γ_f par rapport à la bissectrice d du premier et troisième quadrant d'équation d : y = x .



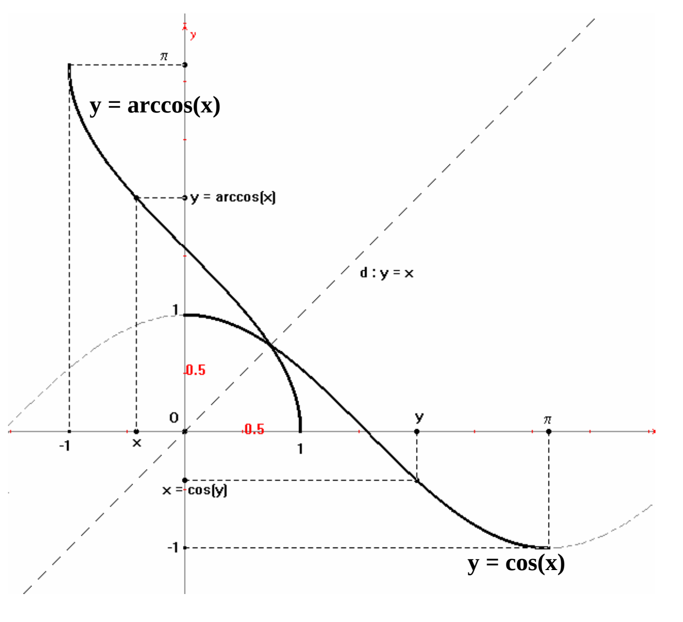
Pour la fonction cosinus, on restreint son domaine de définition à l'intervalle $[0\,;\pi]$ et on a :

$$\cos : [0\,;\pi] \to [-1\,;1]$$
$$x \mapsto \cos(x)$$

Alors cette fonction "cos" est bijective et on peut définir sa fonction réciproque appelée arc cosinus ainsi :

$$\arccos : [-1;1] \to [0\,;\pi]$$
$$x \mapsto \arccos(x)$$

avec l'équivalence : $\boxed{\mathbf{y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)}}$



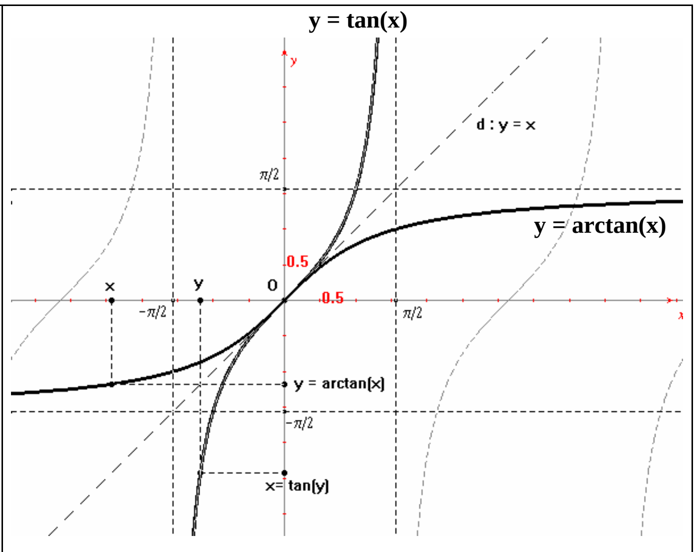
Pour la fonction tangente, on restreint son domaine de définition à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$ et on a :

$$\tan :]-\tfrac{\pi}{2}\,;\tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \tan(x)$$

Alors cette fonction "tan" est bijective et on peut définir sa fonction réciproque appelée arc tangente ainsi :

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2}\,;\tfrac{\pi}{2}[$$
$$x \mapsto \arctan(x)$$

avec l'équivalence : $\boxed{\mathbf{y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)}}$



Exemples : $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, car $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$; $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, car $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$

$\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$, car $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

2 Remarques :

1) Soit $f : A \to B$ une application bijective et $f^{-1} : B \to A$ sa réciproque avec $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$.

On a alors : $f \circ f^{-1} = id_B$ et $f^{-1} \circ f = id_A$, c'est à dire : $\forall x \in B$, : $f \circ f^{-1}(x) = id_B(x) = x$ et $\forall y \in A$, : $f^{-1} \circ f(y) = id_A(y) = y$.

Ainsi : $\forall x \in [-1\,;1]$, $\sin[\arcsin(x)] = x$ et $\cos[\arccos(x)] = x$

$\forall y \in [-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$, $\arcsin[\sin(y)] = y$ et $\forall y \in [0\,;\pi]$, $\arccos[\cos(y)] = y$

et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan[\arctan(x)] = x$

$\forall y \in]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$, $\arctan[\tan(y)] = y$.

2) On a aussi : $\forall x \in [-1\,;1]$, $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$;
les fonctions *arcsin* et *arctan* sont donc **impaires**.($*$ car *sin* et *tan* sont impaires)

preuve : $y = \arcsin(-x) \Leftrightarrow -x = \sin(y) \Leftrightarrow x = -\sin(y) \overset{*}{\Leftrightarrow} x = \sin(-y) \Leftrightarrow -y = \arcsin(x) \Leftrightarrow y = -\arcsin(x)$

3 Dérivées

On a démontré le théorème de dérivation d'une fonction réciproque d'une application bijective :

Si f est une fonction bijective et continue sur un intervalle ouvert contenant y_0 et si f est dérivable en y_0 et si $f'(y_0) \neq 0$, alors la bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $x_0 = f(y_0)$ et on a $(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(y_0)}$.

En posant $y = f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ et $x = f(y) = \sin(y)$ on obtient :

$$(f^{-1})'(x) = [\arcsin(x)]' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \overset{*}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ \forall x \in]-1\,;1[$$.(* cf. exercice 3a)

Exercices : démontrer que : $[\arccos(x)]' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ \forall x \in]-1\,;1[$ et $[\arctan(x)]' = \dfrac{1}{1+x^2}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

remarque :

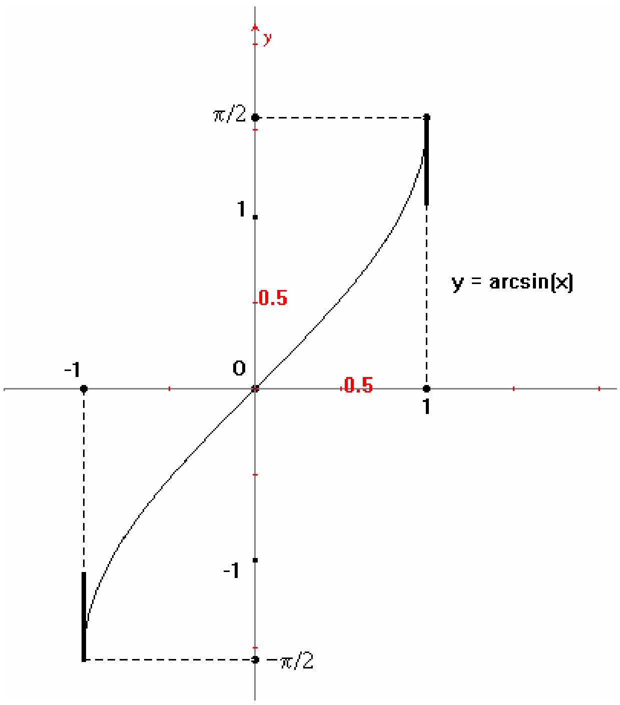
la fonction *arcsin* n'est pas dérivable en x = -1 et en x = 1 ;

calculons $f'_d(1)$ et $f'_g(-1)$:

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0_+} = +\infty \qquad \text{et}$$

$$f'_g(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0_+} = +\infty$$

interprétation géométrique : les tangentes au graphique de la fonction *arcsin* en $x \underset{<}{=} 1$ et en $x \underset{>}{=} -1$ sont verticales :



4 Exercices

1) Démontrer : $\forall x \in [-1\,;1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

2) Calculer le domaine de définition des fonctions f_i définies par :

   a) $y = f_1(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)$

   b) $y = f_2(x) = \frac{x}{\arctan\sqrt{x^2-1}}$

   c) $y = f_3(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

3) Démontrer :

   a) $\forall x \in [-1\,;1]$, $\cos[\arcsin(x)] = \sqrt{1-x^2}$ et $\sin[\arccos(x)] = \sqrt{1-x^2}$

   b) $\forall x \in]-1\,;1[$, $\tan[\arcsin(x)] = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

   c) $\forall x \in [-1\,;1]-\{0\}$, $\tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

   d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin[\arctan(x)] = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\cos[\arctan(x)] = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

4) Calculer les dérivées des fonctions f_i définies par :

   a) $y = f_1(x) = \arcsin(2x-3)$

   b) $y = f_2(x) = \arccos(x^2)$

   c) $y = f_3(x) = \arctan(3x^2)$

   d) $y = f_4(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

5) Calculer :

   a) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$

   b) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$ (poser $t = \frac{x}{a}$)

   c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

   d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (poser $t = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(t)$)

   e) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$ (poser $t = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(t)$)

   f) $\int \arcsin(x)\,dx$

   g) $\int \arccos(x)\,dx$

   h) $\int \arccos(2x)\,dx$

   i) $\int x\ \arctan(x)\,dx$

   j) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

   k) $\int \frac{1}{\sqrt{25-16x^2}}\,dx$

6) a) Calculer l'aire de la surface comprise entre le graphique de la fonction f définie par $y = f(x) = \arcsin(x)$, l'axe des abscisses et les verticales $x = 0$ et $x = 1$.

   b) Même question pour la fonction g définie par $y = g(x) = \arccos(x)$.