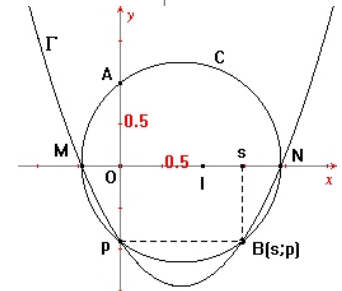
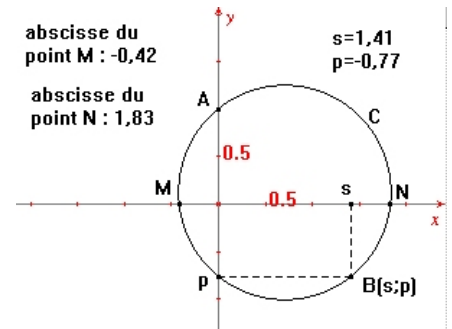


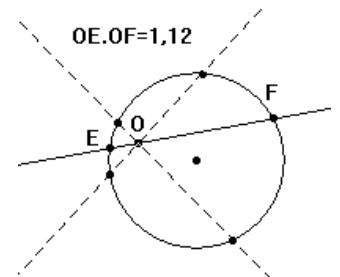
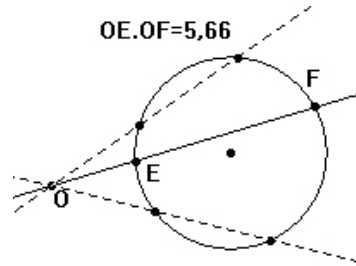
**Résoudre l'équation du second degré  $x^2 - sx + p = 0$ , où  $s$  et  $p$  sont donnés.**

### Construction de Thomas Carlyle (1795 - 1881)

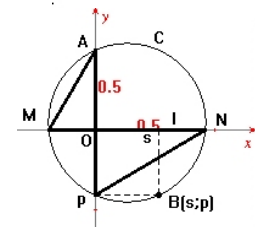
- Faire apparaître les axes et la grille ;
- Créer un point B quelconque (  $B$  sera de coordonnées  $(s;p)$  ) et le point  $A(0;1)$  ; cacher la grille ;
- Créer le cercle  $C$  de diamètre  $[A,B]$  ; les abscisses des points  $M$  et  $N$ , intersections du cercle  $C$  avec l'axe  $(OI)$  ont pour somme  $s$  et pour produit  $p$  et sont donc les racines de l'équation  $x^2 - sx + p = 0$  .  
(Formule de Viète)
- Pour vérifier avec Cabri cette conjecture, construire la parabole  $\Gamma$  d'équation  $y = x^2 - sx + p$  et constater que  $\Gamma \cap (OI) = \{M;N\}$ .
- Démonstration :
  - la somme des abscisses  $x_1$  de  $M$  et  $x_2$  de  $N$  est égale à  $s$  : le translaté du point  $M$  de vecteur  $\vec{ON}$  est le point de  $(OI)$  d'abscisse  $s$ .



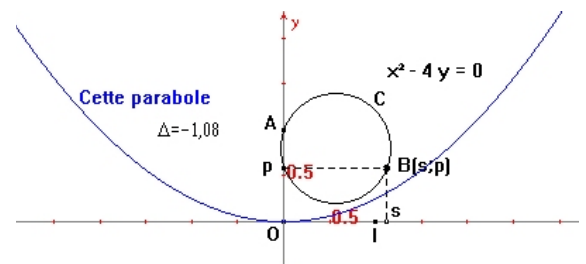
- un théorème de géométrie :  
soit un cercle  $C$  et un point  $O$  du plan,  
si la droite  $d$  par  $O$  coupe le cercle en  $E$  et  $F$ , alors  $OE \cdot OF$  est un produit constant.  
( à vérifier avec Cabri )



En appliquant ce théorème au point  $O$  et au cercle  $C$ , on a  
 $OM \cdot ON = OA \cdot Op \Leftrightarrow |x_1| \cdot |x_2| = 1 \cdot |p| \Leftrightarrow |x_1 \cdot x_2| = 1 \cdot |p|$   
 $\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot p = p$



- Si le cercle  $C$  de diamètre  $[A;B]$  ne coupe pas l'axe  $(OI)$ , alors l'équation  $x^2 - sx + p = 0$  n'admet pas de solution :  
vérification avec Cabri :  
 - avec la calculatrice, calculer  $\Delta = s^2 - 4p$  et vérifier  $\Delta < 0$ .  
 - construire la parabole d'équation  $y = \frac{1}{4}x^2$  et vérifier que :  
 le point  $B$  est à l'intérieur de la parabole  $\Leftrightarrow \Delta < 0$   
 le point  $B$  appartient à la parabole  $\Leftrightarrow \Delta = 0$   
 le point  $B$  est à l'extérieur de la parabole  $\Leftrightarrow \Delta > 0$



- Si  $\Delta = s^2 - 4p < 0$ , l'équation  $x^2 - sx + p = 0$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}$  ;  
si l'on pose  $i = \sqrt{-1}$ , alors les solutions, dites complexes, de l'équation  $x^2 - sx + p = 0$  sont

$$z_{1,2} = x + yi = \frac{s}{2} \pm \sqrt{p - \frac{s^2}{4}} i \text{ avec } y^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = p.$$

Pour construire une représentation de ces deux nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  :

- construire le cercle centré en  $O$  de rayon  $\sqrt{p}$  en construisant le point  $(0; \sqrt{p})$  à l'aide du cercle de diamètre formé par les points  $(0; p)$  et  $(0; -1)$  ( et le théorème de la hauteur ) .

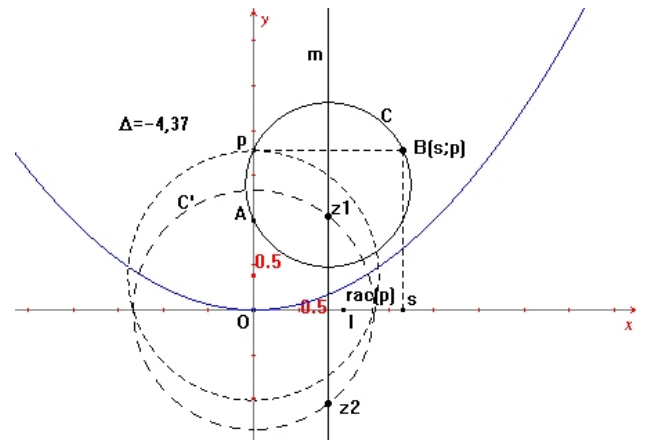
- la médiatrice  $m$  des points  $(0;p)$  et  $B(s;p)$  coupe le cercle  $C'$  centré en  $O$  et de rayon  $\sqrt{p}$  en deux points

$z_1$  et  $z_2$  de coordonnées  $(\frac{s}{2}; \pm \sqrt{p - \frac{s^2}{4}})$

Il est aisé de vérifier, en déplaçant le point  $B$ , que les deux constructions ne sont pas contradictoires : la solution double est le seul cas où les deux constructions proposées sont valables.

( lorsque  $B$  appartient à la parabole

d'équation  $y = \frac{1}{4}x^2$  )



- **Autre construction :**

résoudre l'équation du second degré  $x^2 - ax + b^2 = 0$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels positifs donnés.

Soit la demi-droite  $[AB)$ , avec  $AB = b$ , et  $(BC) \perp (AB)$ , avec  $AC = \frac{a}{2}$ .

Alors  $x_1 = AV$  et  $x_2 = AW$  sont les deux solutions. Démontrer !

