

Représentation d'un cerceau appuyé au coin d'une pièce

On reprend la figure "[Curseur-PC](#)".

Soient O_1 un point de base et I_1 et K_1 les images de I , et K par la

translation de vecteur $\vec{OO_1}$ et J_1 le translaté de O_1 de vecteur \vec{JO} .

Les demi-droites $[O_1, J_1)$, $[O_1, I_1)$ et $[O_1, K_1)$ représentent le coin d'une pièce (le sol, le mur du fond et le mur de gauche), où est posé un cerceau qu'il faut dessiner en PC. Il est clair que quelque soit la position du cerceau, celui-ci sera tangent à la fois au sol, au mur du fond et au mur de gauche. On se donne donc trois points A , B et C sur les demi-droites $[O_1, K_1)$, $[O_1, J_1)$ et $[O_1, I_1)$ et on suppose que le cerceau est inscrit dans le triangle ABC . Pour représenter le cerceau en PC, on construit d'abord le triangle ABC en vraie grandeur. Soit B_1 le point d'intersection de d_1 , la parallèle par B à (J_1K_1) , et de la demi-droite $[O_1, K_1)$ et B_2 le point d'intersection de la droite d_2 , la parallèle par B à (J_1I_1) , et de la demi-droite $[O_1, I_1)$. Les segments $[C, B_1]$ et $[A, B_2]$ représentent respectivement les segments $[C, B]$ et $[A, B]$ en vraie grandeur, tandis que le segment $[A, C]$ est déjà en vraie grandeur. Il suit que le triangle ACB_3 où B_3 est le point d'intersection des cercles $C(C, CB_1)$ et $C(A, AB_2)$, est la représentation en vraie grandeur du triangle ABC . Le problème consiste alors à représenter sur le dessin en PC l'image M' d'un point M sur le [cercle inscrit au triangle \$ACB_3\$](#) .

Soit un point M sur le cercle C inscrit au triangle ACB_3 ; soit M_1 le point d'intersection de la droite (AM) et du segment $[C, B_3]$ et M_2 le point d'intersection de la droite (B_3M) et du segment $[A, C]$.

La droite d_3 , parallèle par M_1 à la droite (B_3B) , coupe le segment $[B, C]$ en M_3 et le segment $[A, M_3]$ coupe le segment $[B, M_2]$ en M' dont le lieu, lorsque M parcourt le cercle C , est [une ellipse, image en PC du cercle \$C\$](#) .

On peut programmer [une macro](#) avec comme

objets initiaux : A , B , C , B_3 , et M

objet finaux : M'

et appliquer celle-ci au centre O' du cercle pour obtenir le centre O'' de l'ellipse.

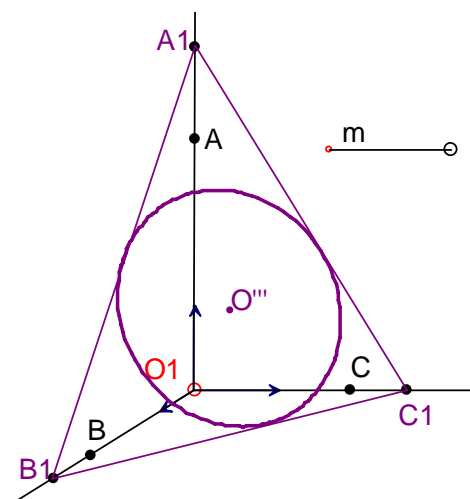
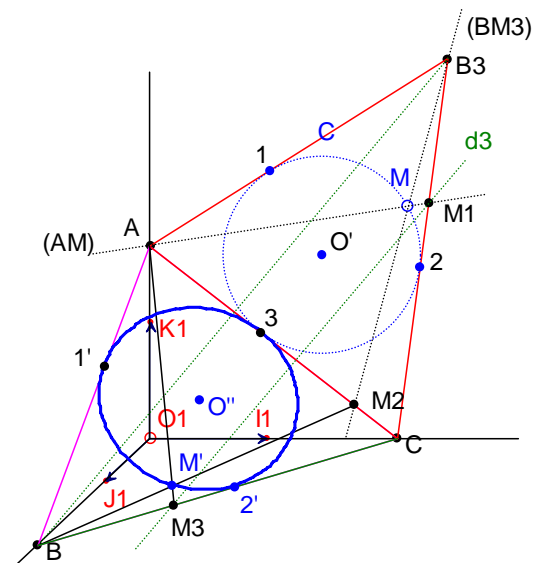
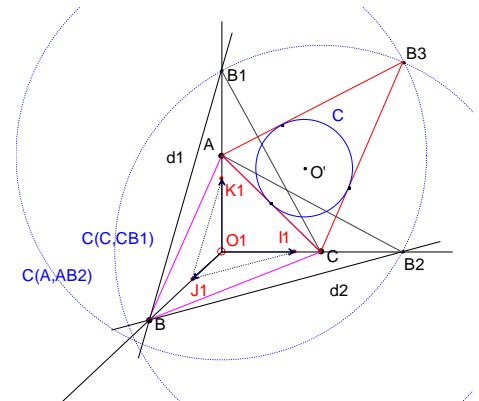
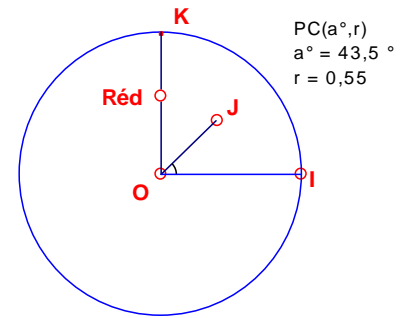
Il est naturel avec Cabri, de vouloir changer en temps réel, la position du cerceau. Il suffit pour cela de déplacer l'un des points A , B ou C . Mais malheureusement, on modifie en même temps le rayon du cercle C . Autrement dit, l'ellipse image du cercle C alors obtenu est le dessin en PC d'un autre cerceau.

[Pour y remédier, on se donne un segment de longueur \$m\$ \(rayon du cerceau\), puis on construit le point \$N\$ de la demi-droite \$\[O', M\)\$ tel que \$O'N = m\$. L'homothétie de](#)

centre O_1 et de rapport $\frac{O'N}{O'M}$ permet de construire les

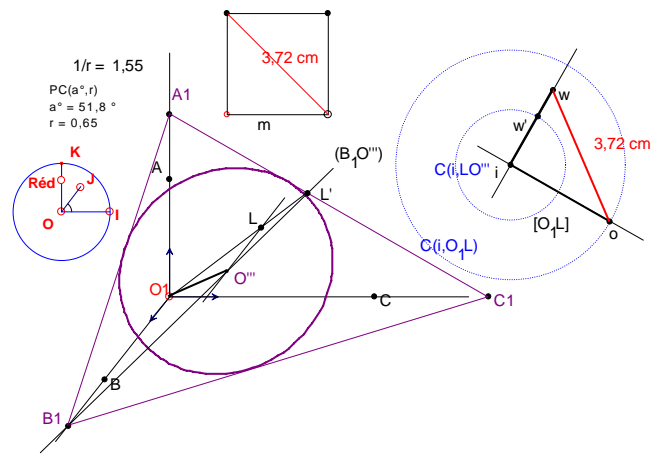
points A_1 , B_1 , C_1 , O''' , M'' images respectivement de A , B , C , O' , M' .

[On peut alors changer la position du cerceau par rapport aux trois murs en déplaçant les points \$A\$, \$B\$ ou \$C\$.](#)



Une propriété remarquable :

On se propose de représenter en vraie grandeur le segment $[O_1, O''']$. Soit L l'image de O''' par la projection orthogonale sur le plan $(O_1 I_1 K_1)$: la droite $(B_1 O''')$ coupe le segment $[A_1, C_1]$ en L' et la parallèle à $(O_1 J_1)$ issue de O''' coupe la droite $(O_1 L')$ en L . On construit un triangle iwo représentant en vraie grandeur le triangle rectangle $O_1 L O'''$: soit donc un point libre i et la parallèle par i à $(A_1 C_1)$ et le cercle de centre i et de rayon $O_1 L$: on obtient un point o tel que $io = O_1 L$. Puis soit w' sur la perpendiculaire par i à (io) et w son image par l'homothétie de centre i de rapport $1/r$ (r est le coefficient de réduction). Le segment $[ow]$ nous donne en vraie grandeur la distance du point O_1 au centre de l'ellipse O''' .



Si l'on déplace à présent le cerceau (en déplaçant l'un des points A , B ou C), on constate que la longueur du segment $[o, w]$ est constante !!

Autrement dit la distance du point O_1 au centre du cerceau ne dépend pas de la position de celui-ci. Plus précisément, si on construit la diagonale d'un carré de côté m (rayon du cerceau), on voit que celle-ci a la même longueur que le segment $[o, w]$. Voilà conjecturée une bien jolie propriété de cette configuration de l'espace : la distance du point O_1 au centre du cerceau est égale à son rayon multiplié par $\sqrt{2}$.