

Un exemple de limite infinie avec une asymptote verticale - solution

Déterminer la fonction a qui donne l'aire $a(x)$ d'un triangle isocèle $\triangle MNP$ circonscrit à un rectangle fixe $ABCD$ dont les dimensions sont $AB = a = 2$ et $BC = b = 1$, avec $x = HP$, hauteur du triangle $\triangle MNP$, comme variable.

♥ constantes : $a = 2$ et $b = 1$

♥ fonction : aire = base \cdot hauteur = $\frac{1}{2} MN \cdot HP = MH \cdot HP = y \cdot x$

♥ variable : $HP = x$, avec $1 < x$

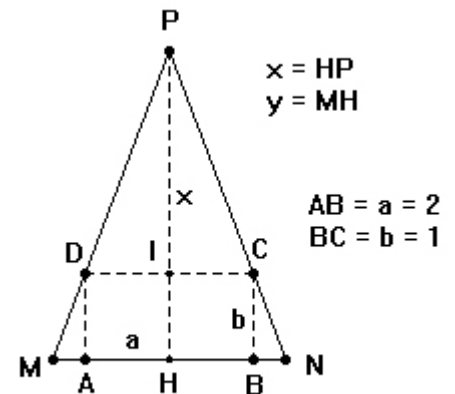
♥ paramètre : $MH = y$

♥ calcul de $a(x)$: $a(x) = y \cdot x$; exprimons y en fonction des constantes et de la variable x :

avec le théorème de Thalès dans $\triangle MHP$ et $\triangle DIP$,

$$\text{on a } \frac{MH}{DI} = \frac{PH}{PI} = \left(\frac{MP}{DP} \right) \Rightarrow \frac{y}{1} = \frac{x}{x-1}$$

$$\text{ainsi, } a(x) = y \cdot x = \frac{x}{x-1} \cdot x = \frac{x^2}{x-1}$$



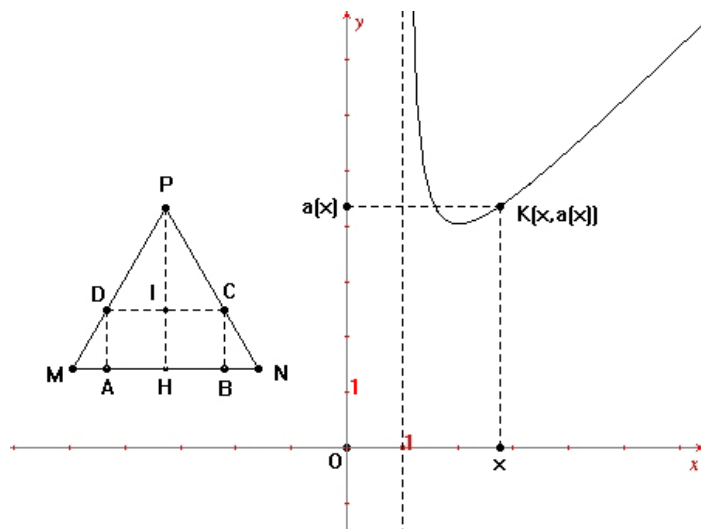
Construire cette figure avec Cabri-géomètre :

Représentation graphique de la fonction a : lorsque le point P se rapproche du point I , x tend vers 1 par la droite et le point $K(x, a(x))$ dessine une courbe qui se rapproche de la droite verticale $x = 1$, sans jamais la couper.

On a

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} a(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{0^+} \right) = +\infty.$$

Cette limite " infinie " traduit la présence d'une droite verticale (d'équation $x = 1$) qui " accompagne " la courbe de la fonction a lorsque x tend vers 1 .



De plus, la $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$. Le graphique de la fonction a admet-elle aussi une asymptote à l'infini ? Graphiquement il semble que oui ! Comment la calculer ?