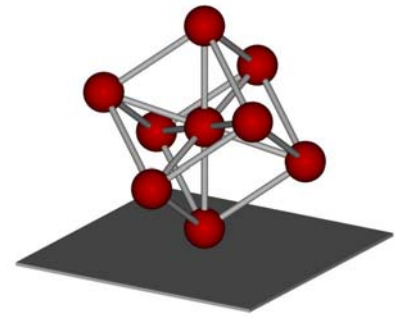


Cours n° 5-4 - Rotation dans l'espace – l'Atomium de Bruxelles - solutions

L'objectif de ce travail est de modéliser l'Atomium de Bruxelles et de le faire tourner autour de son axe vertical.

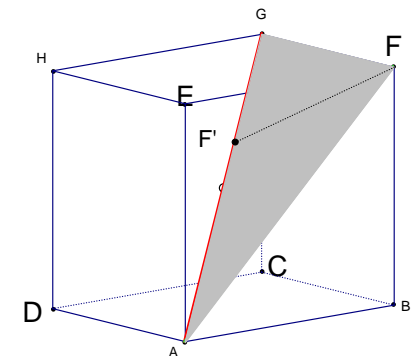
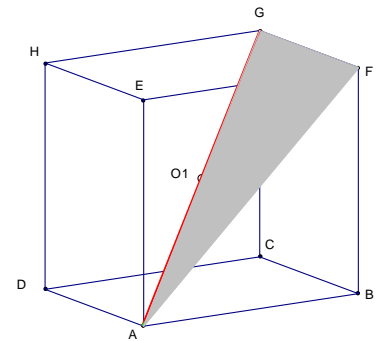


Pour modéliser un cube posé sur une de ses pointes, deux questions se posent :

- 1) Si l'arête de longueur c est donné, calculer la hauteur h du "monument" ;
- 2) Quelle est l'altitude des 6 autres sommets du cube ? En observant la sculpture ci-dessus, on voit bien qu'ils sont 3 à 3 à la même altitude.
- 3) Si l'on regarde le cube de dessus (au zénith), le plus haut sommet G nous apparaît confondu avec le sommet A (sur lequel repose le cube) et le centre O_1 du cube, et les autres sommets B , C , D , E , F et H appartiennent à un cercle de rayon R et ces six points composent un hexagone régulier (par symétrie). Calculer ce rayon R .

Recherche de réponses :

- 1) Le triangle AFG est rectangle en F ; de plus $AF = c \cdot \sqrt{2}$ et $AG^2 = AF^2 + FG^2 \Leftrightarrow AG^2 = 2c^2 + c^2 = 3c^2 \Leftrightarrow AG = c \cdot \sqrt{3}$.
- 2) Pour des raisons de symétrie évidente, si l'altitude du plus haut sommet est $h = c \cdot \sqrt{3}$, celle des autres est $h/3$ et $2h/3$.
- 3) Si l'on regarde le cube de dessus (au zénith), le plus haut sommet G nous apparaît confondu avec le sommet A (sur lequel repose le cube) et le centre O_1 du cube, et les autres sommets B , C , D , E , F et H appartiennent à un cercle de rayon R et ces six points composent un hexagone régulier (par symétrie).



Le rayon R du cercle de base du cylindre d'axe (AG) contenant le cube (ou du cercle contenant les sommets B , C , D , E , F et H) est la distance FF' du sommet F à la diagonale (AG) ;

posons $x = FF'$ et $y = GF'$:

par Pythagore dans le triangle rectangle $GF'F$: $GF^2 = GF'^2 + F'F^2 \Leftrightarrow c^2 = y^2 + x^2$

par Pythagore dans le triangle rectangle $AF'F$: $AF^2 = AF'^2 + F'F^2 \Leftrightarrow 2c^2 = (c \cdot \sqrt{3} - y)^2 + x^2$

En résolvant ce système, on obtient $y = c \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x = c \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}$

Nous disposons maintenant de tous les éléments pour commencer la modélisation :

Ouvrir la figure "[curseur-PC-rot](#)", l'enregistrer sous le nom "cube-pointe".

Construire un segment-curseur horizontal qui modélisera l'arête du cube, notons-la " c ".

Pour obtenir le rayon R de la sphère circonscrite à l'hexagone régulier BCDEFH, nous allons construire un triangle rectangle égale au triangle AFG d'hypoténuse égale à $c \cdot \sqrt{3}$ et de cathètes égaux à $c \cdot \sqrt{2}$ et c :

Soit un point libre A_1 , le cercle C_1 de centre A_1 de rayon c (donné par le curseur), un point libre sur C_1 ($A_1B_1 = c$), et F_1 à l'intersection de la perpendiculaire à (A_1B_1) par B_1 et du cercle de centre B_1 et de rayon c :

alors $A_1F_1 = c \cdot \sqrt{2}$; puis l'orthogonale par F_1 et le cercle de centre F_1 de rayon c se coupe en G_1 tel que

$F_1G_1 = c$; d'où par Pythagore, $A_1F_1 = c \cdot \sqrt{3}$; la distance F_1F_1' sera égale à $R = c \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Soit donc un point libre O_1 , la verticale d (parallèle à (OK)) par O_1 et le point H intersection de d avec le cercle Ω de rayon A_1G_1 ; puis le cercle de centre O_1 et de rayon F_1F_1' .

Construire ensuite les translatés I_1 , J_1 , Rot_1 de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$ des points I, J, Rot ; puis le point I_1' , intersection de la demi-droite $[O_1I_1)$ avec le cercle Ω , puis le point J_1' , intersection de la demi-droite $[O_1J_1)$ avec la parallèle par I_1' à (I_1J_1) ; on applique ensuite la macro « ellipse-3pts » à O_1 , I_1' et J_1' .

Soit le point Rot_1' , intersection de la demi-droite $[O_1Rot_1)$ avec le cercle Ω : avec l'outil « hexagone régulier », cliquer O_1 , Rot_1' puis un troisième point sur Ω pour que le polygone régulier soit un hexagone. Cet hexagone tourne autour de O_1 avec le bouton Rot sur le curseur.

Ouvrir la figure « [const-1](#) »

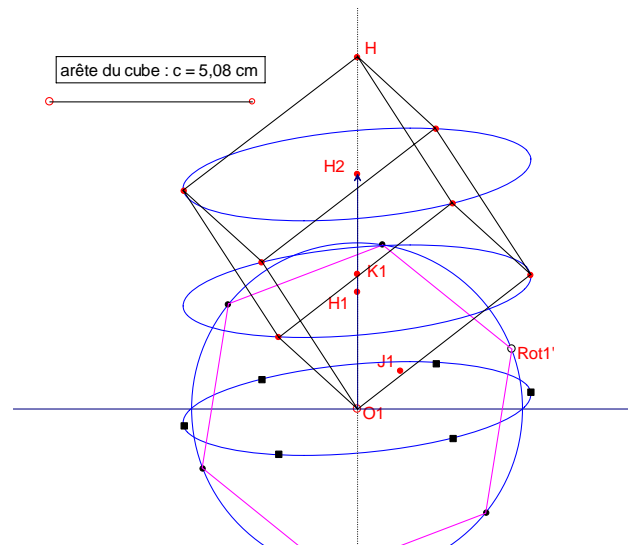
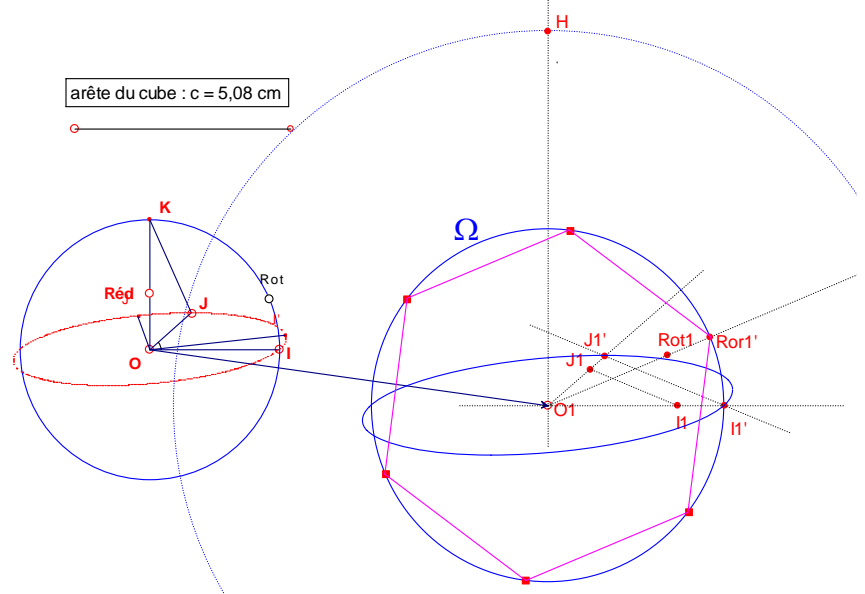
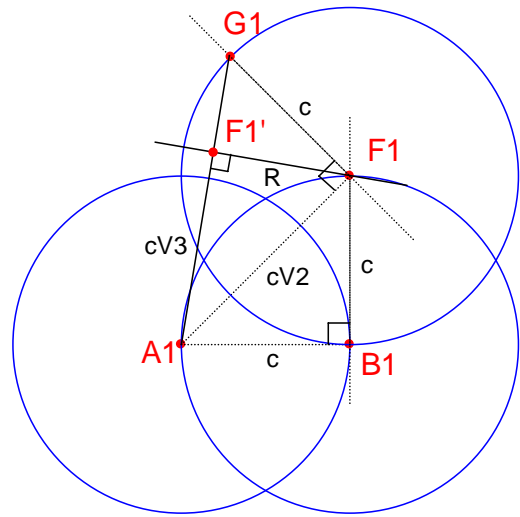
Avec la macro « Divise 3 », on divise le segment $[O_1, H]$ en trois segments isométriques : $[O_1, H_1]$, $[H_1, H_2]$ et $[H_2, H]$. Puis on translate l'ellipse $O_1I_1'J_1'$ selon les vecteurs $\overrightarrow{O_1H_1}$ et $\overrightarrow{O_1H_2}$

pour obtenir les ellipses Σ_1 et Σ_2 ; avec la macro

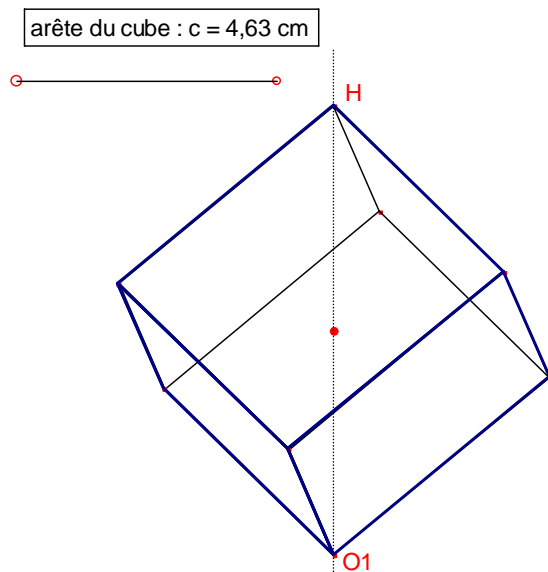
« affinité-point », on construit sur l'ellipse de base les images des six sommets de l'hexagone régulier (cliquer sur la droite (O_1I_1) , puis sur K_1 , J_1 et un sommet). On translate trois de ces points non consécutifs de vecteur $\overrightarrow{O_1H_1}$ puis les trois autres de vecteur $\overrightarrow{O_1H_2}$.

Il nous reste à relier correctement ces six points pour obtenir le cube tournant sur une pointe.

Ouvrir la figure « [const-2](#) ».



Pour faire apparaître les faces visibles, on utilise la macro « face_visible_quadri.mac » du site de Geneviève Tulloue : <http://gtulloue.free.fr/Cabri3D/polyedres/cube.html>



ouvrir la figure cabri « [const-3](#) »

Pour construire les boules sur chaque sommet, reprenons la figure « const-2 » et cachons tous les objets de construction. Construisons un petit curseur donnant le rayon de chaque boule et avec l'outil compas on construit en chaque sommet un cercle de rayon donné, puis on le colore de gris.

On peut encore construire en gras et gris les segments reliant les boules.

Ouvrir la figure « [const-4](#) » finale.

