

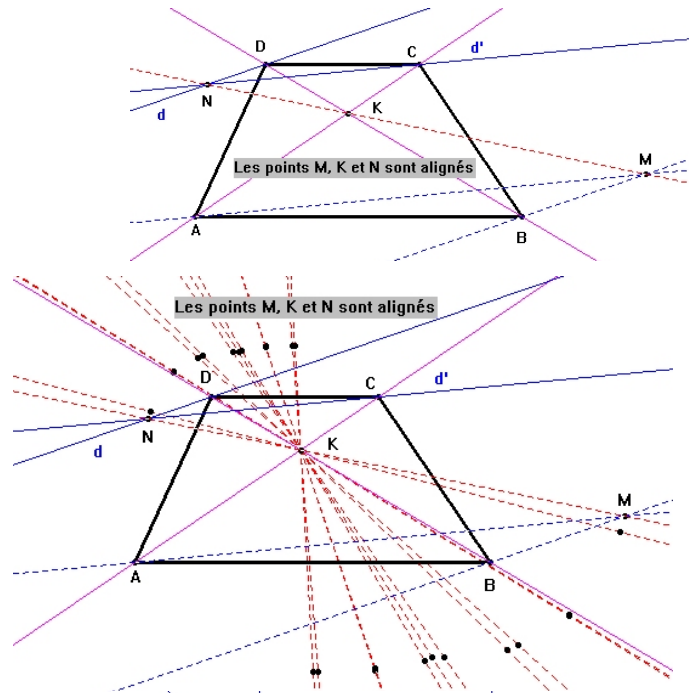
Expérimenter avec Cabri-géomètre : les homothéties - corrigé

Problème 1 :

Soit un trapèze ABCD et le point $K \in (AC) \cap (BD)$.
 Soit un point M du plan et les droites d et d' telles que $d \ni D$ et $d \parallel (MB)$, et $d' \ni C$ et $d' \parallel (AM)$.
 Soit le point $N \in d \cap d'$.
 Vérifier que les points M, K et N sont alignés.

Résolution :

Avec cabri-géomètre, en déplaçant le point M on constate très facilement que cette conjecture est vraie.



Problème 2 : a) Soit deux cercles $C_1 (O_1, r_1)$ et $C_2 (O_2, r_2)$, avec $r_1 \neq r_2$. Construire une homothétie transformant C_1 en C_2 .

La solution est esquissée par la figure ci-contre : on obtient deux homothéties, l'une de rapport positif (dite homothétie positive : celle de centre O) et l'autre de rapport négatif (dite homothétie négative : celle de centre O'). On pourrait démontrer que les rapports de ces deux homothéties sont opposés.

On programme maintenant une macro-construction

" **centre d'homothétie** " avec comme objets initiaux les deux cercles C_1 et C_2 et comme objets finaux les deux centres d'homothétie O_1 et O_2 .

b) Soit maintenant trois cercles $C_1 (O_1, r_1)$, $C_2 (O_2, r_2)$ et $C_3 (O_3, r_3)$. Construire à l'aide de la macro précédente les six centres d'homothéties de ces trois cercles pris deux à deux.

On nommera ces six points O_{12} , O_{21} , O_{23} , O_{32} , O_{13} et O_{31} , O_{12} étant par exemple le centre de l'homothétie positive transformant C_1 en C_2 et O_{21} le centre de l'homothétie négative transformant C_1 en C_2 .

Conjecture : ces centres d'homothétie sont alignés trois à trois.

Peut-on dégager une règle pour décrire ces alignements ?

Pour justifier cette conjecture, il suffit de démontrer que

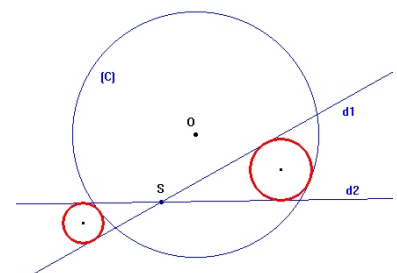
1) la composée de deux homothéties $H_{(A, r)}$ et $H_{(A', r')}$ est une troisième homothétie $H_{(A'', r'')}$ avec A, A' et A'' alignés et $r'' = r \cdot r'$

2) la composée de l'homothétie transformant C_1 en C_2 et de celle transformant C_2 en C_3 est bien l'homothétie transformant C_1 en C_3 .

Problème 3 :

On se donne deux droites d_1 et d_2 et un cercle $C (O, r)$.

Construire un cercle tangent à ces deux droites d_1 et d_2 et au cercle C .



Corrigé du problème 3 :

Prenons le cas de figure dans lequel d_1 et d_2 sont sécantes en S , le point S étant à l'intérieur du cercle $C_{(O,r)}$.

L'idée est d'abandonner une des contraintes de l'énoncé pour construire une "fausse" solution à partir de laquelle on construira ensuite une "vraie" solution.

Résolution :

- on construit un cercle C_1 de centre K tangent "seulement" au deux droites d_1 et d_2 : son centre K est alors un point de l'une des bissectrices des deux droites d_1 et d_2 .
Le cercle C_1 est notre "fausse" solution.
- Il reste à en déduire la construction d'une "vraie" solution $C_{(O,r)}$:
Supposons la "vraie" C' construite, et considérons les trois cercles $C_{(O,r)}$, C_1 et C' . On peut affirmer que leurs centres d'homothétie positive sont deux à deux alignés (cf. problème 2).
Or si $C_{(O,r)}$ et C' sont tangents intérieurement, leur point de contact T est leur centre d'homothétie positive. D'autre part, par construction le point S est le centre d'homothétie positive des cercles C_1 et C' . Le centre d'homothétie positive I des cercles $C_{(O,r)}$ et C_1 se construit aisément selon la méthode décrite au problème 2. (Si l'on dispose de la macro, il suffit d'appliquer la macro aux cercles C_1 et C'). Les points S , I et T étant alignés, le point T est donc l'intersection de la droite (SI) et du cercle $C_{(O,r)}$.
Le centre du cercle solution C' sera à l'intersection de la droite (OT) et de la bissectrice.
- On remarque que la droite (SI) coupe le cercle $C_{(O,r)}$ en un autre point T' , qui permet d'obtenir un autre cercle solution C'' , tangent extérieurement à $C_{(O,r)}$, et situé de l'autre côté de S par rapport à C_1 : cette fois ce sont les deux centres d'homothétie négative S et T' qui sont alignés avec le centre d'homothétie positive I , quand on considère les trois cercles $C_{(O,r)}$, C_1 et C'' .
- Et ce n'est pas fini : si on construit le centre d'homothétie négative J des cercles $C_{(O,r)}$, C_1 , la même méthode permet de trouver deux autres cercles qui sont des solutions du problème.

De plus, en travaillant avec l'autre bissectrice, on pourra construire encore d'autres cercles solution.

