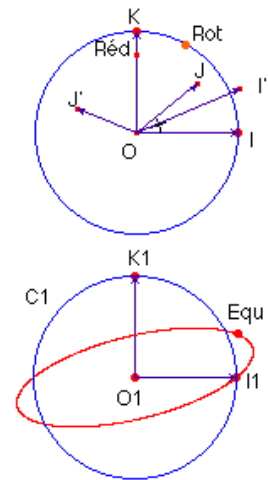


Cours n° 4-3 - Rotation dans l'espace – la sphère en PC

Ouvrir la figure "Curseur-rotation" et l'enregistrer sous le nom :
"Sphère en PC".

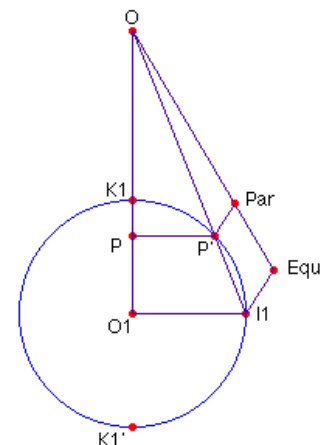
Il n'y a pas grand chose à faire si on veut dessiner en PC une sphère de rayon unité. On se donne un point de base O_1 et on construit les points I_1 et Equ (pour équateur) images des points I et I' par la translation t de vecteur $\vec{OO_1}$. On trace ensuite le cercle C_1 de centre O_1 , passant par I_1 , et l'ellipse Σ_1 , lieu du point **Equ** lorsque le point **Rot** décrit le cercle $C(O, OI)$ et c'est fini. En effet, le cercle C_1 et l'ellipse Σ_1 représentent respectivement le cercle frontal et le cercle équatorial (c'est à dire les grands cercles portés par des plans parallèles aux plans (OIK) et (OIJ)), et cela pourrait suffire pour représenter la sphère en PC. Mais on pourrait aussi préférer rajouter d'autres parallèles ou des méridiens.

angle de fuite : 39,3°
coeff. de réduction : k = 0,77

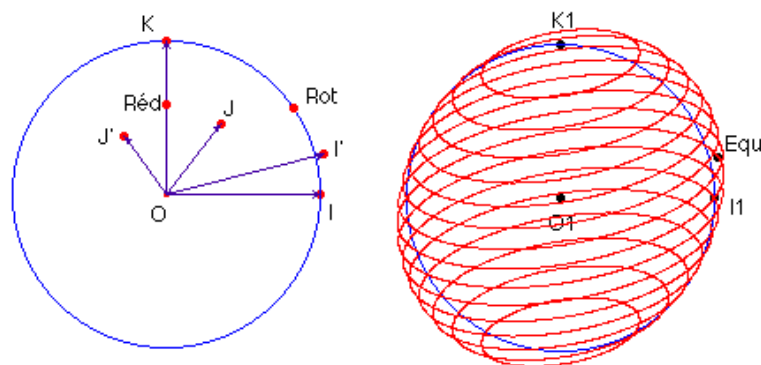


Constructions de parallèles :

Soient K_1 , l'image de K par la translation t , K'_1 son symétrique par rapport à O_1 , P un point du segment $[K_1K'_1]$, P' l'un des points d'intersection du cercle C_1 et de la parallèle à (O_1I_1) issue de P et h l'homothétie qui transforme O_1 en P et I_1 en P' . Le cercle C_p , intersection de la sphère et du plan parallèle à l'équateur passant par P , est l'image du cercle équatorial par l'homothétie h . Il en est donc de même de leurs représentations en PC. Il suffit donc, sur le dessin en PC, de construire le point **Par** (pour parallèle) image du point **Equ** par h . L'ellipse représentant le cercle C_p s'obtient alors comme lieu du point **Par** lorsque **Rot** décrit le cercle C . Il nous reste plus qu'à transformer cette figure en une macro construction *Parallèle* avec pour objets initiaux : O_1 , I_1 , K_1 , Equ et P , et pour objets finaux : le point **Par**. On l'applique autant de fois que l'on désire. On remarquera qu'il suffit de représenter des parallèles contenues dans le demi-espace de frontière l'équateur et contenant K_1 , puis de compléter par la symétrie de centre O_1 (car la PC conserve le milieu).



angle de fuite : 52,4°
coefficient de réduction : 0,59



Ouvrir la figure "Curseur-rotation" et l'enregistrer sous le nom :
 "Sphère en PC-méridien".

Constructions de méridiens :

Un méridien est un grand cercle de diamètre $[K_1K_1']$.

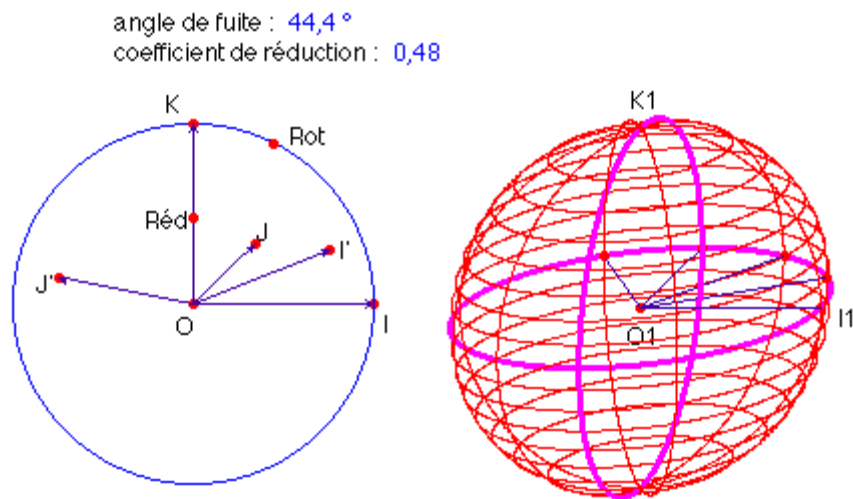
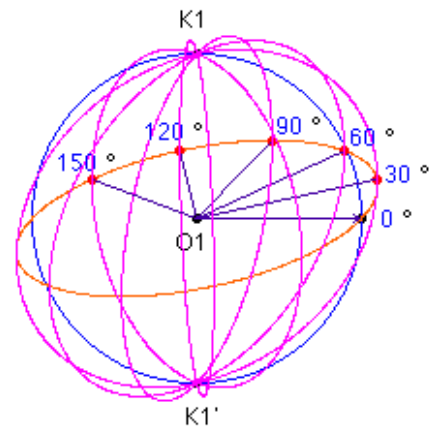
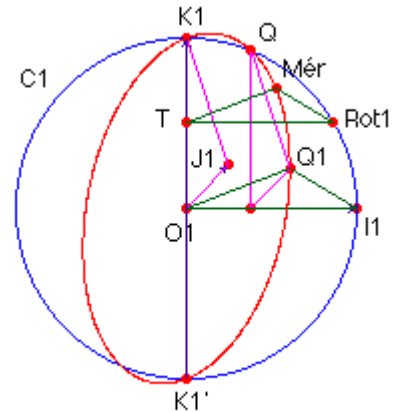
Soit J_1 l'image de J par la translation t de vecteur $\vec{OO_1}$, Q un point du cercle C_1 , α une mesure de l'angle (O_1I_1, O_1Q) , Q_1 l'image du point I_1 par la rotation (de l'espace) d'axe (O_1K_1) et d'angle α , et Σ_{Q_1} le méridien passant par Q_1 . On sait maintenant, par la fiche précédente, représenter sur le dessin en PC le point Q_1 .

Le méridien Σ_{Q_1} est alors obtenu en faisant tourner le trièdre $(O, \vec{OI_1}, \vec{OQ_1}, \vec{OK_1})$ autour de l'axe (O_1I_1) .

Plus précisément, on construit les points Rot_1 image de Rot par la translation t , le projeté orthogonal de Rot_1 sur la droite (O_1K_1) , le point Mér (pour méridien) tel que les triangles $\Delta O_1I_1Q_1$ et $\Delta T Rot_1 Mér$ soient homothétiques, et le lieu du point Mér lorsque le point Rot décrit le cercle C .

Après avoir transformé la figure en macro "Méridien" (objets initiaux : $O_1, I_1, J_1, K_1, Rot_1, Q$; objets finaux : le segment $[O_1Q_1]$ et le point Mér) on construira, par exemple les méridiens correspondants aux angles $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ et 150° .

Notons pour finir, qu'il existe sur nos dessins en PC des parallèles et des méridiens qui "sortent" du grand cercle frontal, ce qui interdit à ce dernier (contrairement à une idée malheureusement très répandue) d'être, en général, le contour apparent du dessin de la sphère.



Application de l'affinité à la perspective d'une sphère :

Ouvrir la figure "[sphère en PC](#)" :

On peut démontrer que le contour apparent de la sphère est une ellipse dont le grand axe est une fuyante et de longueur $2 \cdot \text{Red}_2 \text{I}_2$, où Red_2 est le point homothétique de Red_1 dans l'homothétie de rapport r/OI ; le petit axe est de longueur $2 \cdot \text{OI}_2$.

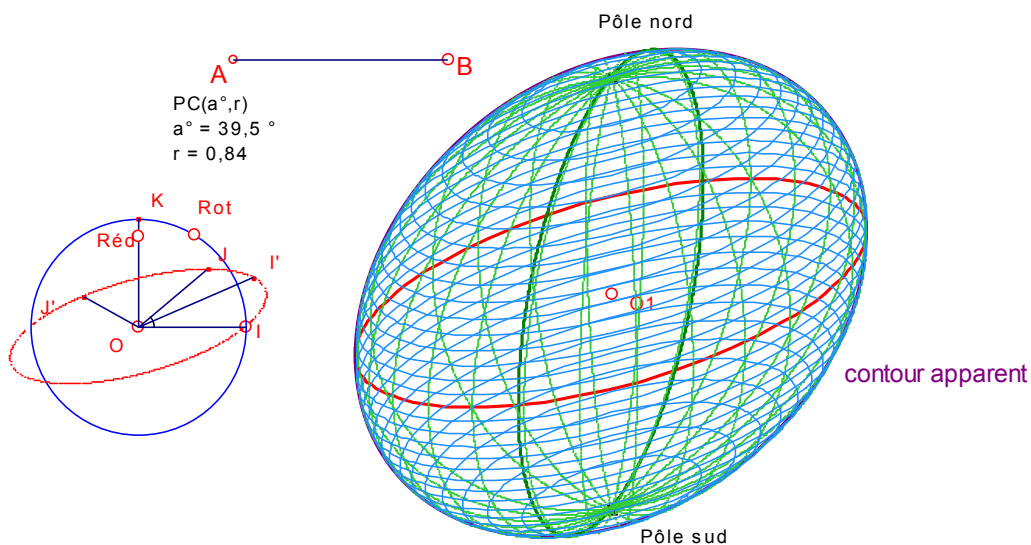
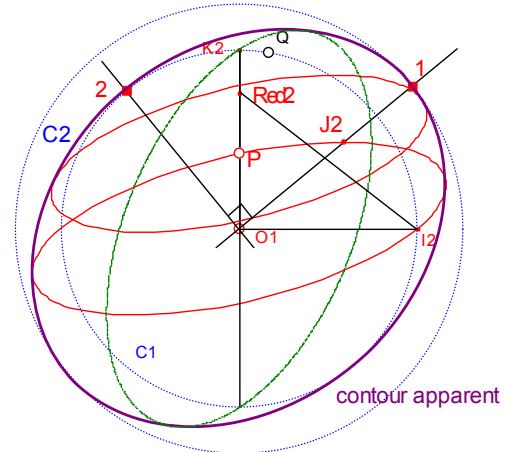
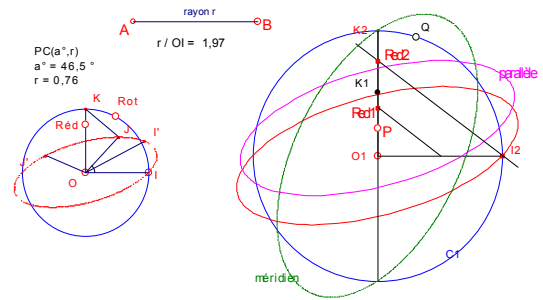
On construit donc le cercle $\text{C}_1(\text{O}_1, \text{OI}_1)$ et le cercle $\text{C}(\text{O}_1, \text{Red}_2 \text{I}_2)$.

La droite $(\text{O}_1 \text{J}_2)$ coupe le cercle C_2 au point "1", extrémité du grand axe ; l'orthogonale à $(\text{O}_1 \text{J}_2)$ par O_1 coupe C_1 au point "2", extrémité du petit axe.

On applique la macro "ellipse-3 pts.mac" aux points O_1 , "1" et "2" et on obtient l'ellipse contour apparent de la sphère en PC.

Cette ellipse est l'image du grand cercle de la sphère contenu dans le plan perpendiculaire à la direction de la projection. Tout autre grand cercle est un méridien de la sphère, et donc en PC une ellipse tangente intérieurement à l'ellipse contour.

ouvrir la figure ci-contre : [sphère en PC-final.fig](#)



[sphère en PC-complet.fig](#)