

Cours 3-2 : Introduction à l'espace : Section d'un tétraèdre par un plan sécant - corrigé

Exercice 1 :

Résolution :

On a dans le plan (ABD) : $(PR) \cap (BD) = \{Q'\}$;

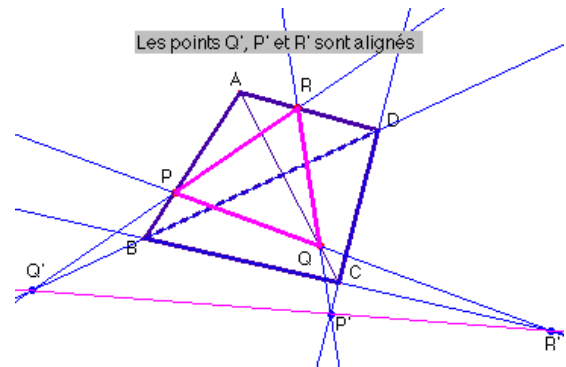
ainsi $Q' \in (BD)$ et $(BD) \subset (BCD)$,

donc $\{Q'\} = (PR) \cap (BCD)$.

De même pour $\{P'\} = (QR) \cap (BCD)$

et pour $\{R'\} = (PQ) \cap (BCD)$.

Les points Q' , P' et R' sont alignés, car ils appartiennent à l'intersection des deux plans (PRQ) et (BCD) , qui est une droite (si les deux plans ne sont pas parallèles).



Exercice 2

a) Résolution : Construire la droite (QR) ; dans le plan (ACD) , on a $(QR) \cap (AD) = \{T\}$.

Le point T appartient à la droite (AD) , donc au plan (ABD) .

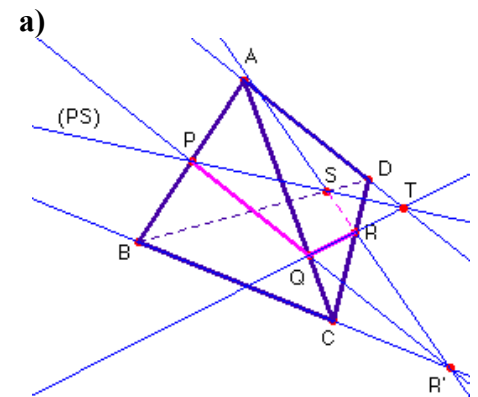
D'où, dans ce plan (ABD) , P appartient à la droite (AB) et

on a $(PT) \cap [BD] = \{S\}$ et $S \in (BCD)$.

Or $T \in (PQR)$, car $T \in (QR)$, donc $(PT) \subset (PQR)$ et

donc $S \in (PQR) \cap (BCD)$ et $(RS) = (PQR) \cap (BCD)$.

La section du tétraèdre par le plan (PQR) sera donnée par le quadrilatère $PQRS$.



b) Résolution : Conjecture : le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.

Démonstration : on utilise ici **le théorème du toit**.

- Les deux plans sécants (PQR) et (BCD) contiennent respectivement les droites (PQ) et (BC) parallèles dans le plan (ABC) ; leur droite commune (SR) est donc parallèle aux droites (PQ) et (BC) .

- De même, les deux plans (ABD) et (PQR) contiennent respectivement les droites (AD) et (QR) parallèles dans le plan (ADC) ; par le théorème du toit, leur droite commune (PS) est donc parallèle aux droites (AD) et (QR) .

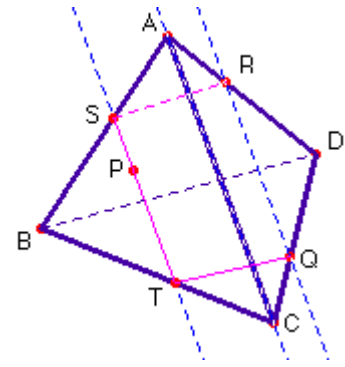
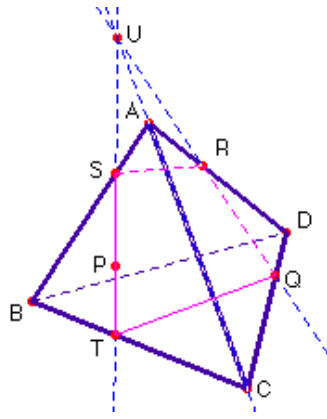
Le quadrilatère $PQRS$ dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles est un parallélogramme.

Exercice 3

Résolution :

a) Si les droites (RQ) et (AC) sont sécantes en U et $U \in (PQR)$; alors la droite (PU) ($\subset (PQR)$) coupe le segment $[AB]$ en S et le segment $[BC]$ en T . Alors le quadrilatère $QRST$ est la section recherchée.

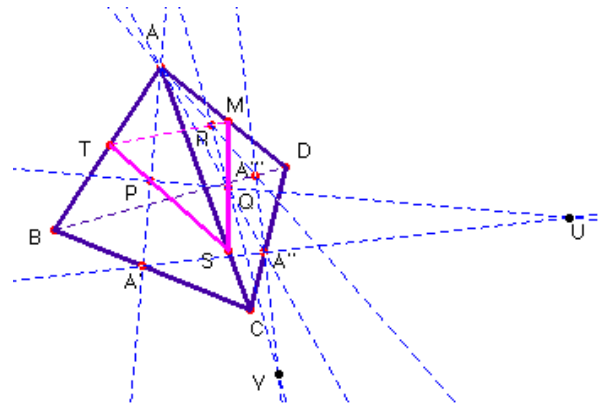
b) Si les droites (RQ) et (AC) sont parallèles, alors par le théorème du toit on a : les plans (ABC) et (PQR) coupent le plan (ACD) en deux droites parallèles, $(RQ) \parallel (AC)$, et donc leur droite commune, qui passe par P , est parallèle à ces deux droites ; d'où la construction : par P , on construit une parallèle à (AC) dont les intersections S avec $[AB]$ et T avec $[BC]$ nous donne le quadrilatère $QRST$ recherché.



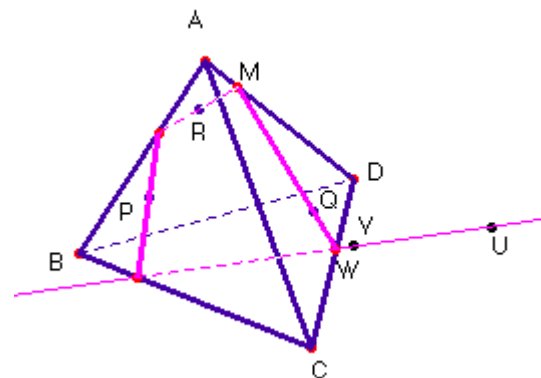
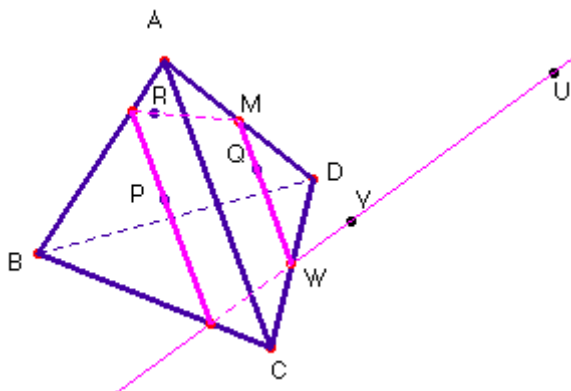
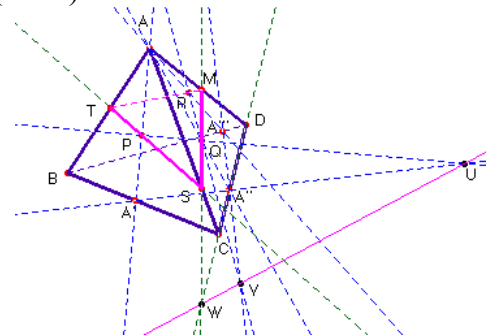
Exercice 4 :

Résolution :

- Dans le plan (ABC), la droite (AP) coupe le segment [BC] en A' , et $A' \in (BCD)$ car $A' \in (BC)$.
- Dans le plan (ACD), la droite (AQ) coupe le segment [CD] en A'' et $A'' \in (BCD)$ car $A'' \in (CD)$.
- On a donc : $(A'A'') = (APQ) \cap (BCD)$.
D'où $(PQ) \cap (A'A'') = \{U\}$ et U est un point de la droite commune des plans (PQR) et (BCD).
Il nous faut en déterminer encore un.



- Dans le plan (ABD), la droite (AR) coupe le segment [BD] en A''' , et $A''' \in (BCD)$ car $A''' \in (BD)$.
Les droites (RQ) et $(A'A''')$ se coupent en V, et V est un point commun des plans (PQR) et (BCD).
- La droite (UV) est donc l'intersection des plans (PQR) et (BCD).
- Dans le plan (BCD), les droites (UV) et (CD) se coupent en W. Ce point appartient au plan (ACD) et donc la droite (WQ) est l'intersection des plans (ACD) et (PQR), car $W \in (PQR)$. Il ne nous reste plus qu'à construire : $\{S\} = (WQ) \cap [AC]$, $\{T\} = (SP) \cap [AB]$ et $\{M\} = (TR) \cap [AD]$.
- Le triangle STM est alors la section du plan (PQR) et du tétraèdre ABCD.
- Lorsque l'on déplace le point Q dans le plan (ACD) (ou le point R dans le plan (ABD) ou le point P dans le plan (ABC)), on peut obtenir un quadrilatère comme section du tétraèdre ABCD par le plan (PQR).



Une solution rapide :

Cette solution repose sur le principe de projection de la section sur l'une des faces à couper.

On projette deux points de la section selon l'arête commune aux faces contenant ces deux points : ici on projette donc P et Q sur le plan (ABD) selon l'arête (AC). La droite passant par les deux points obtenus est donc la projection de la droite (PQ) sur le plan (ABD) selon la direction (AC). Cette droite coupe la droite (PQ) en un point **PQfond** qui est l'intersection de la droite (PQ) avec le plan (ABD).

Comme ce point **PQfond** appartient au plan (PQR), la droite passant par lui et R aussi. Donc la droite (**PQfond** R) est la trace de la section dans le plan (ABD).

Cette droite peut couper la face ABD de trois façons différentes, puisqu'elle coupe 2 arêtes parmi trois. On traite successivement chacun de ces trois cas, ce qui est très rapide.

Remarquons toutefois qu'un cas peut avoir deux sous cas, selon les intersections des droites en jeu sur les arêtes, comme le montrent les illustrations ci-dessous.

En pratique, sur un tétraèdre, une section ne peut être qu'un triangle ou un quadrilatère.

