

Parabole

Tangentes, normales, foyer et directrice, enveloppe, développée, lieu de points, tableau de fils, tourniquette, théorèmes de Poncelet, de Pappus-Pascal.

Sommaire

1. Méthode de Torricelli
2. Sous-normale
3. Foyer et directrice
4. Cordes et tangentes
5. Tourniquette
6. Tangente et lieu géométrique
7. Parabole et composition de fonctions
8. Enveloppe - Tableau de fils
9. Développée
10. Construction pratique
11. Lieu de l'orthocentre
12. Lieu de points
13. Théorèmes de Poncelet
14. Théorème de Pappus-Pascal

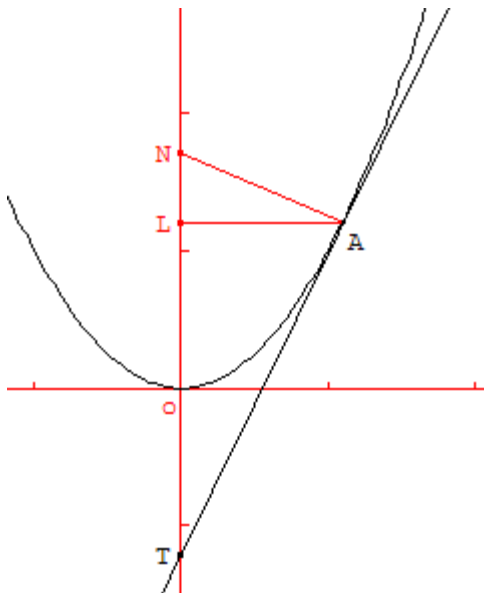


1. Méthode de Torricelli

Evangelista Torricelli : physicien et géomètre italien (1608-1647) : a connu à l'âge de 20 ans Galilée et sous son influence a étudié le mouvement parabolique des projectiles. Il découvrit la quadrature de la cycloïde en 1638 puis son aire en 1644. Il inventa le baromètre en 1643.

Soit P la parabole d'équation $y = f(x) = kx^2$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(Dans ce document les figures sont réalisées en prenant $k = 1$)



Pour tout point A d'abscisse a non nulle Torricelli propose la méthode suivante :

- construire le projeté orthogonal L de A sur l'axe des ordonnées,
- construire le symétrique T de L par rapport à O ,
- la droite (AT) est la tangente à la parabole P au point A .

La tangente a donc pour équation $y = f'(a)x - f(a)$.

On dit que $[LT]$ est la sous-tangente ; la sous-tangente à la parabole a un milieu fixe : le point O .

2. Sous-normale

La perpendiculaire, au point de contact A , à la tangente coupe l'axe des ordonnées en N .

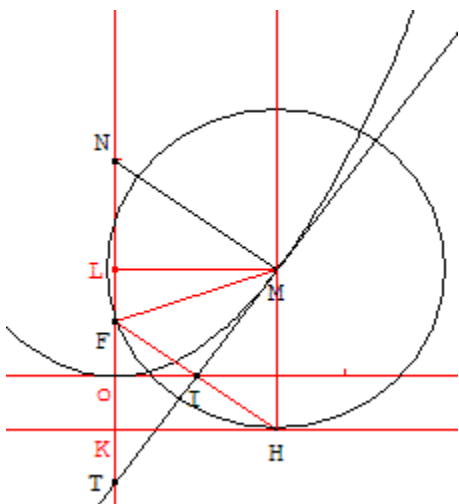
La parallèle à l'axe des abscisses passant par A coupe l'axe des ordonnées en L .

Quelque soit le point A , distinct de O , la sous-normale $[LN]$ a une longueur constante

$[LN]$ est appelé sous-normale. Sa longueur est égale au paramètre

$$p = LN = \frac{1}{2k} \text{ de la parabole d'équation : } y = kx^2 = \frac{1}{2p}x^2 \text{ (si } k > 0\text{)}.$$

3. Foyer et directrice



Etant donné une droite (d) et un point F non situé sur (d) . La distance de F à (d) est le paramètre $p = FK$ (où K est la projection orthogonale de F sur (d)).

Une parabole est l'ensemble P des points équidistants du foyer F et de la directrice (d) .

C'est donc l'ensemble des points M tel que $MF = MH$ avec H la projection orthogonale de M sur (d) .

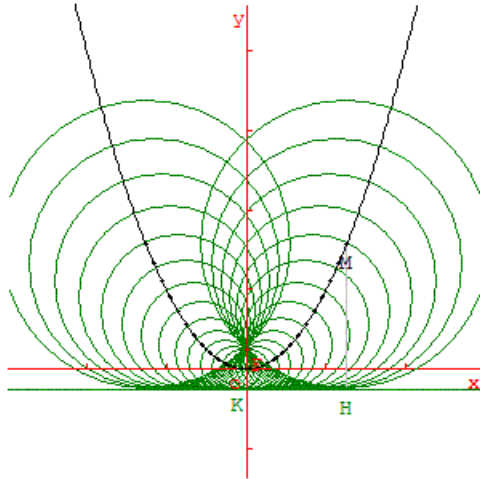
Le point F est appelé le *foyer* de la parabole P et la droite (d) la *directrice*.

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si le point F a pour coordonnées $(0, \frac{p}{2})$

et la directrice a pour équation $y = -\frac{p}{2}x$,

la parabole P a pour équation $y = \frac{1}{2p}x^2$.

La parabole P est aussi l'ensemble des centres M des cercles passant par le foyer F et tangents à la directrice (d).



La tangente en M à la parabole est la médiatrice de $[FH]$. La normale en M coupe l'axe (FK) de la parabole en N .

La sous-normale $[LN]$ a une longueur est égale au paramètre :
 $p = KF = LN$.

(MN) est la bissectrice de l'angle FMy .

Un rayon focal issu de F se réfléchit en M sur la parabole et repart parallèlement à l'axe de la parabole, propriété utilisée dans les phares, radars ou antennes ...

4. Cordes et tangentes

La tangente à la parabole parallèle à la corde $[AB]$ a pour point de contact le point C dont l'abscisse est la moyennes des abscisse de A et B .

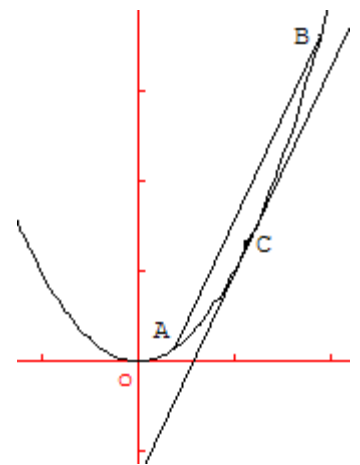
Point	A	B	C
Abscisse	a	b	$c = \frac{a+b}{2}$

Le coefficient directeur u de (AB) est :

$$u = f'(c) = k(a+b). \text{ \{parabole d'équation } y = kx^2\}}$$

Soit I le milieu du segment $[AB]$: la droite (CI) est parallèle à l'axe de la parabole (Oy).

Si le paramètre p est positif, le point C est en-dessous du segment $[AB]$. La parabole (P) est une courbe convexe.



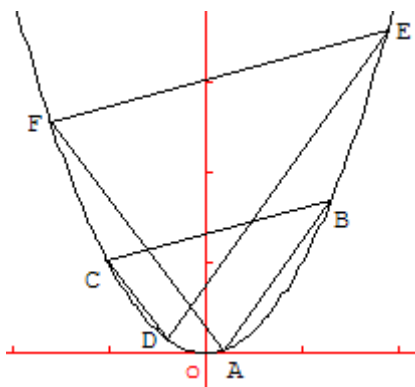
Cordes parallèles

Soit A, B, D et E quatre points distincts de la parabole P d'équation $y = kx^2$ d'abscisses respectives a, b, d et e .

On peut déduire de la question précédente que la corde $[AB]$ est parallèle à la corde $[DE]$ si et seulement si :
 $a + b = d + e$.

(Ces deux cordes sont parallèles à la tangente au point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$).

5. Tourniquet sur une parabole



On choisit sur la parabole P quatre points A, B, C et D d'abscisses respectives a, b, c et d .

On construit deux points E et F tels que $(DE) \parallel (AB)$, puis $(EF) \parallel (BC)$.
 On montre que le tourniquet se referme avec $(FA) \parallel (CD)$.

En effet si e et f sont les abscisses de E et F on a :

$$a + b = d + e \text{ car } (AB) \parallel (DC),$$

$$e + f = b + c \text{ car } (EF) \parallel (BC).$$

En ajoutant membre à membre les deux égalités

et en simplifiant par $b + e$ on trouve :

$$a + f = c + d \text{ ce qui prouve que } (FA) \parallel (CD).$$

6. Corde focale

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note P la parabole représentative de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{4}$, de paramètre $p=2$ et F le foyer de coordonnées $F(0,1)$.

Une droite (Δ) de coefficient directeur m passe par F et coupe P en A et B d'abscisses x_1 et x_2 .

Les tangentes à la parabole P en A et B se coupent en I .



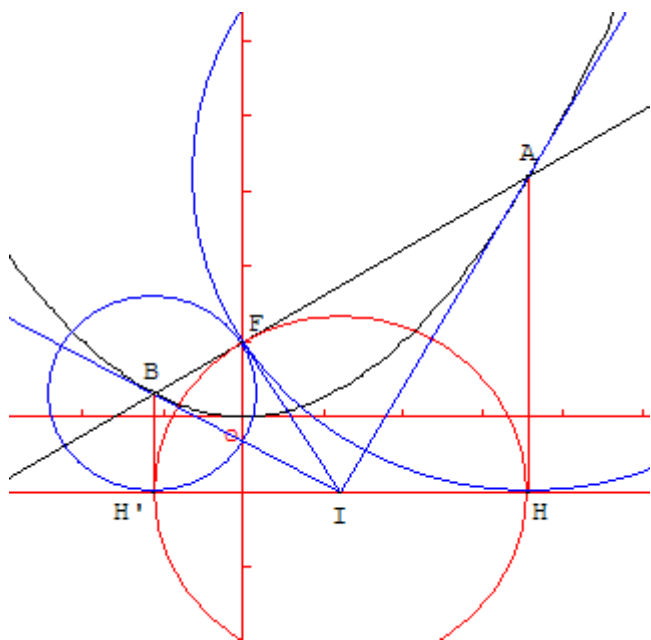
Objectif : trouver le lieu géométrique du point I lorsque la droite (Δ) pivote autour de F .

Démonstration « analytique »

- Montrer que la droite (Δ) a pour équation $y = mx + 1$.
- Vérifier que x_1 et x_2 sont les deux solutions distinctes de l'équation du second degré :

$$x^2 - 4mx - 4 = 0.$$
- Ecrire en fonction de x_1 l'équation de la tangente en A à la parabole P et en fonction de x_2 l'équation de la tangente en B .
- Montrer que ces deux tangentes sont sécantes au point I de coordonnées :
- Trouver les coordonnées de I en fonction de m et vérifier que I est un point de la directrice d'équation $y = -1$.

Démonstration en « géométrie pure »



P est une parabole de foyer F et de directrice (d) .

Soit (Δ) une droite passant par F distincte de Oy .

Analyse : si A est un point de la parabole situé sur la droite (Δ) , ce point équidistant de F et de (d) est le centre d'un cercle passant par F et tangent à (d) . La normale à Δ passant par F est tangente à ce cercle. Cette normale coupe la directrice en I . les demi-droites $[IH]$ et $[IF]$ sont les deux tangentes au cercle issues de I , les segments sont égaux : $IF = IH$. Le point H est sur le cercle de centre I passant par F .

Synthèse : la normale à (Δ) passant par F coupe la directrice en I . Le cercle de centre I passant par F coupe la directrice en deux points H et H' . Les normales à (d) passant par H et H' coupent (Δ) en deux points A et B . $AH = AF$ donc A est sur la parabole P et (AI) ,

médiatrice de $[FH]$ est tangente à la parabole. De même (BI) médiatrice de $[FH']$ est l'autre tangente à la parabole.

$[AB]$ est une **corde focale** de la parabole P . Les tangentes en A et B se coupent sur la directrice. Ces deux tangentes sont les bissectrices en I des droites (d) et (IF) ; elles sont donc orthogonales.

7. Parabole et composition de fonctions

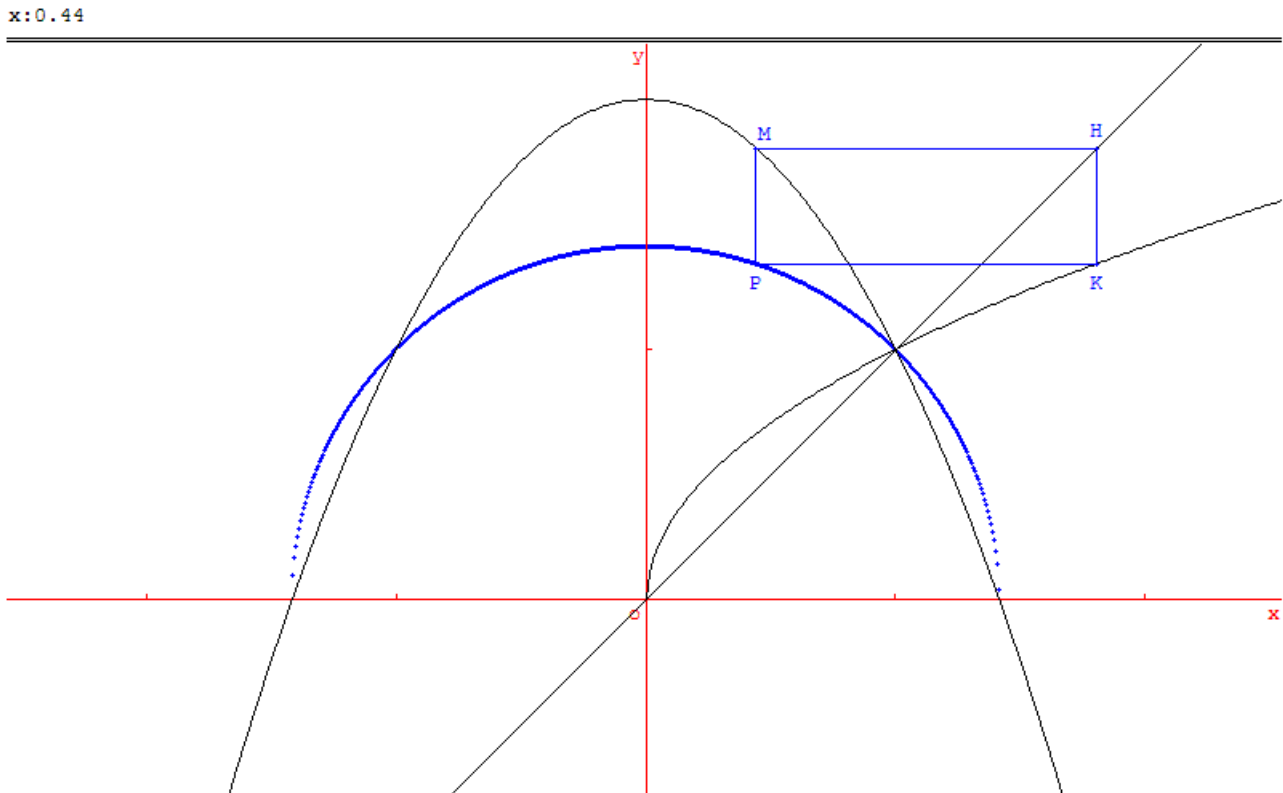
f est la fonction définie sur $[0, +\infty]$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - x^2$.

M est un point d'abscisse x de (P) , représentation graphique de g ;

H est le point de la droite (d) d'équation $y = x$ ayant la même ordonnée que M .

Lorsque la construction est possible, on note K le point de la courbe (C) , représentation graphique de f , ayant la même abscisse que H .

P est le quatrième sommet du rectangle $MHKP$.



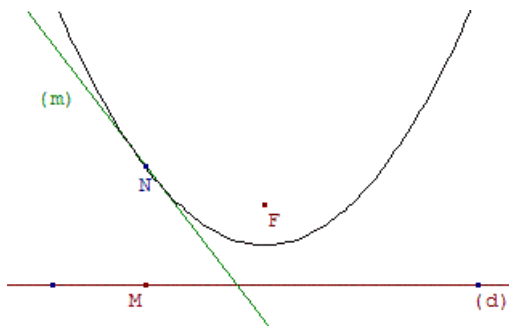
En déplaçant le point M vérifier que le point K existe que lorsque x est dans l'intervalle $I = [-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$. Ce point K appartient à l'arc des points de la courbe (C) dont les abscisses sont inférieures à 2.

Les coordonnées des sommets du rectangle sont $M(x, 2-x^2)$; $H(2-x^2, 2-x^2)$; $K(2-x^2, \sqrt{2-x^2})$ et $P(x, \sqrt{2-x^2})$.

$OP^2 = 2$. L'ensemble des points P , d'ordonnées positives, est le demi cercle de centre O est de rayon $\sqrt{2}$.

La fonction k définie sur I , qui à x associe l'ordonnée de P , est la fonction composée $k = f \circ g$.

8. Enveloppe



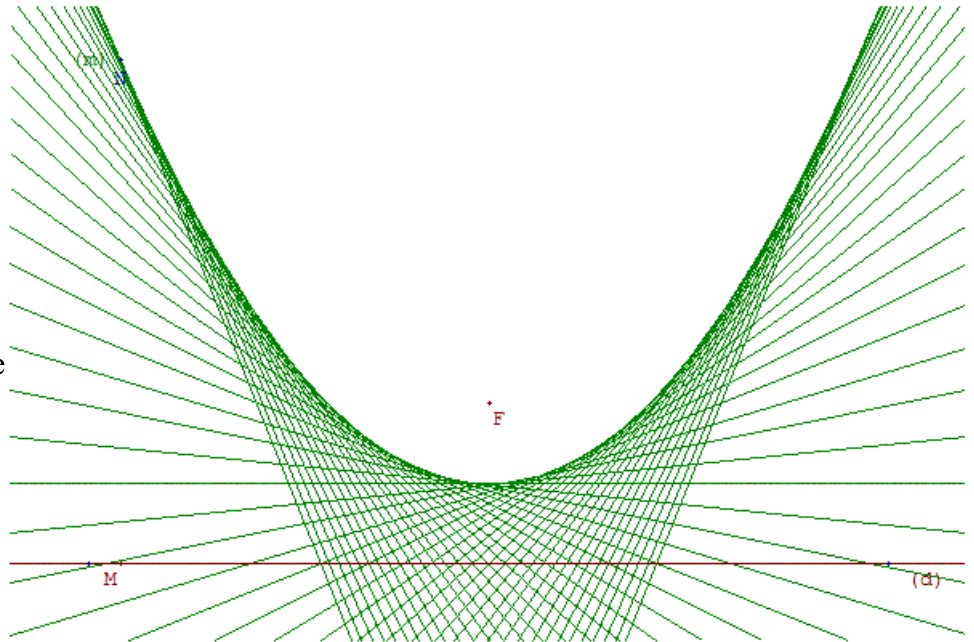
Soit un point F et une droite (d) étant considérés comme fixes, un point M variable sur (d) et (m) la médiatrice de $[FM]$.

L'objectif est de déterminer l'enveloppe de la famille des médiatrices (m) obtenues lorsque le point M varie sur la droite (d) .

Tableau de fils

La réalisation de tableaux de fils et clous est maintenant un classique des travaux manuels.

Nous allons à l'aide de GéoPlan la simuler pour obtenir une parabole en réalisant un réseau de tangentes où les segments représentent des fils tendus entre deux clous.



Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note P la parabole représentative de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{4} \text{ étudiée sur l'intervalle } [-10, 10].$$

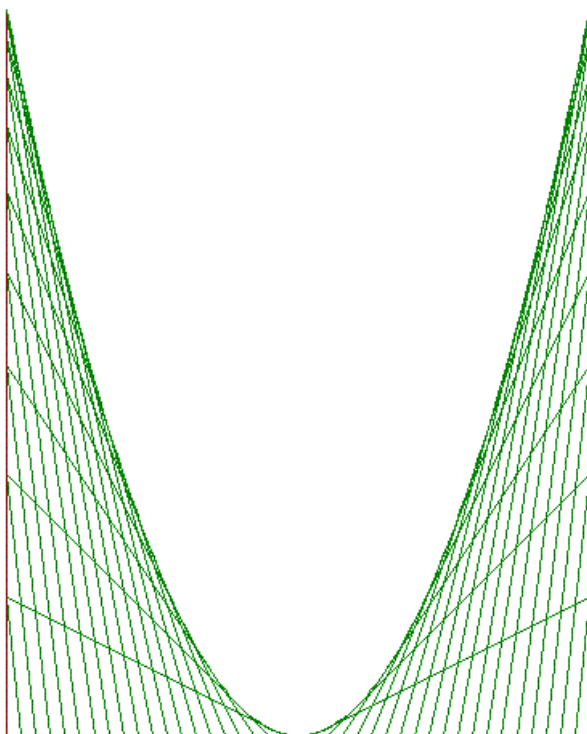
Comme nous l'avons vu au paragraphe 1. la méthode de Toricelli montre que la tangente au point d'abscisse n a pour équation $y = f'(n)x - f(n)$.

Cette tangente coupe l'axe Ox au point A d'abscisse $\frac{n}{2}$.

La tangente coupe, si $n > 0$, la droite verticale d'équation $x = 10$ au point B d'ordonnée

$$10 f'(n) - f(n) = 10 \frac{n}{2} - \frac{n^2}{4},$$

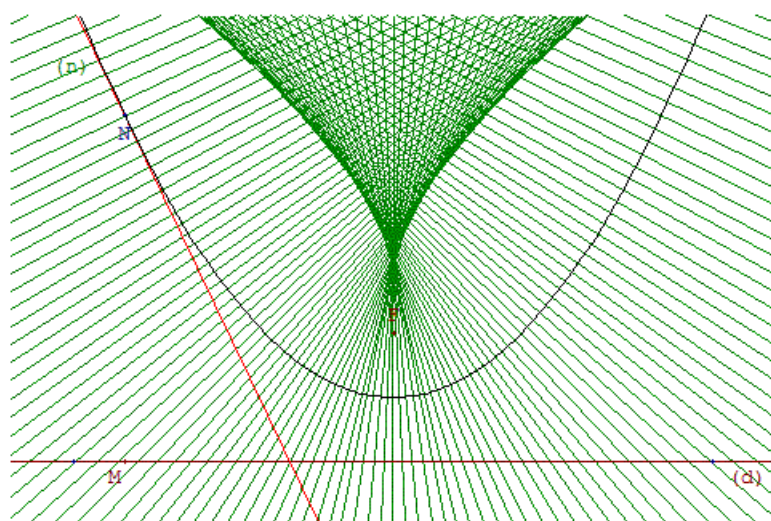
ou si $n < 0$, la droite verticale d'équation $x = -10$ au point B d'ordonnée : $-10 f'(n) - f(n)$.



Le mode trace permet de dessiner 41 segments à partir de "points A" régulièrement répartis sur le bord horizontal et, sur chaque bord vertical, de 10 autres points B dont les ordonnées calculées ci-dessus sont :

4,75	9	12,75	16	18,75	21	22,75	24	24,75	25
------	---	-------	----	-------	----	-------	----	-------	----

9. Développée



Soit un point F et une droite (d) étant considérés comme fixes, foyer et directrice d'une parabole, un point M variable sur (d) et (t) la médiatrice de [FM] tangente en N à la parabole.

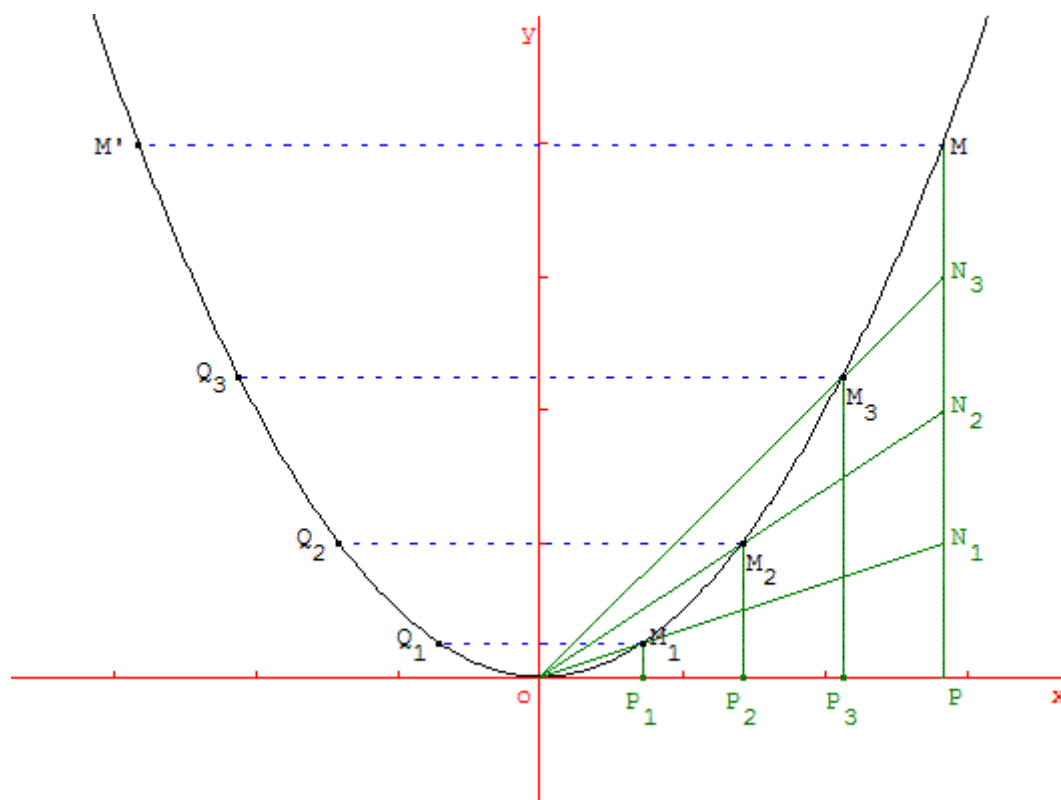
Au point N, traçons la normale à la parabole, perpendiculaire à (t).

L'objectif est de déterminer l'enveloppe de la famille des médiatrices (n) obtenues lorsque le point M varie sur la droite (d).

La courbe obtenue est la développée de la parabole.

10. Construction pratique

Construire point par point une parabole dont on connaît le sommet, l'axe de symétrie et un point.



A partir d'un point M de la courbe ayant pour projection P sur la tangente au sommet on partage les segments [OP] et [PM] en quatre parties égales. Les points M₁, M₂, M₃ construits ci-contre sont situés sur la parabole et on complète avec les symétriques.

Si la parabole a pour équation $y = kx^2$, soit pour M : $MP = k OP^2$,

on en déduit que par exemple que pour M₃(x,y) on a $x = OP_3 = \frac{3}{4} OP$,

$$\text{et } y = P_3M_3 = \frac{3}{4}PN_3 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}MP = \left(\frac{3}{4}\right)^2 k OP^2 = k \left(\frac{3}{4}OP\right)^2 = k OP_3^2 = k x^2 \text{ vérifie l'équation.}$$

La construction peut aussi se faire à partir d'un des points M_1 , M_2 ou M_3 pour trouver des points de la parabole au delà du point connu.

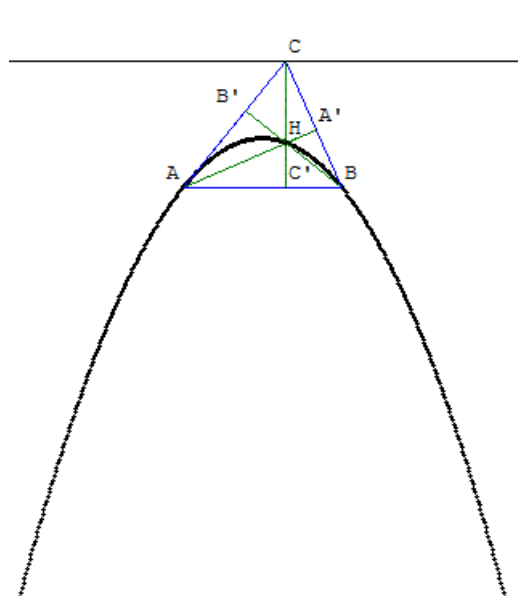
Cette méthode est valable pour d'autres partages des segments $[OP]$ et $[PM]$ en parties égales.

11. Lieu de points

Recherche du lieu de l'orthocentre d'un triangle lorsque l'un des sommets se déplace sur une droite.

a. La droite est parallèle au côté opposé à ce sommet.

Si (d) est une droite parallèle à (AB) , distincte de (AB) , le lieu de l'orthocentre H quand le sommet C parcourt la droite (d) est une courbe passant par A et B et cette courbe est symétrique par rapport à la médiatrice de $[AB]$. On va montrer que c'est une parabole.



En géométrie analytique utilisons un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ centré en O milieu de $[AB]$ tel que $\vec{i} = \frac{\vec{OB}}{OB}$ et que $\vec{j}$ soit un vecteur directeur de la médiatrice de $[AB]$.

Les coordonnées des points sont alors $A(-1, 0)$; $B(1, 0)$; $C(x, \gamma)$ et $H(x, y)$ car H étant l'orthocentre de ABC , C et H ont même abscisse x .

AH étant orthogonal à CB , on a le produit scalaire nul :

$$\vec{AH} \cdot \vec{CB} = 0.$$

Les coordonnées des vecteurs sont $\vec{AH} (1 + x, y)$;

$$\vec{CB} (1 - x, -\gamma).$$

On obtient finalement avec la formule analytique du produit scalaire :

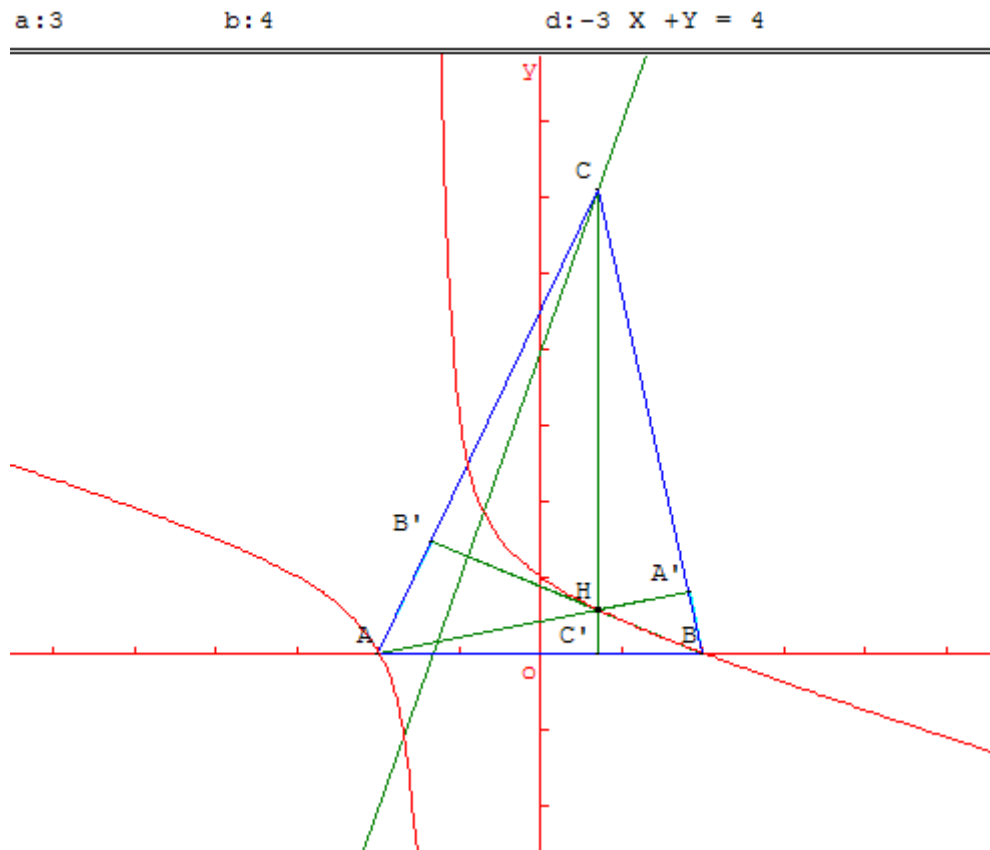
$$XX' + YY' = (1 + x)(1 - x) - \gamma y = 0.$$

Soit
$$y = \frac{1}{\gamma}(-x^2 + 1) \quad \gamma \neq 0.$$

Cette équation prouve que H se déplace sur une parabole passant par A et B et même que le lieu de H est toute la parabole, étant donné que x décrit $\mathbf{R}$.

Réciproquement comme l'orthocentre du triangle ABH est le point C on peut montrer que si C se déplace sur une parabole passant par A et B , d'axe de symétrie la médiatrice de $[AB]$, alors le lieu de l'orthocentre est une droite parallèle à (AB) .

b. C décrit une droite qui coupe (AB) en D distinct de A et B.



Dans le repère du paragraphe a précédent le point C se déplace sur une droite (d) d'équation :

$$y = \alpha x + \beta \text{ avec } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0.$$

Il a donc pour coordonnées $C(x, \alpha x + \beta)$. Les coordonnées des autres points sont toujours $A(-1, 0)$; $B(1, 0)$ et $H(x, y)$.

Les coordonnées des vecteurs sont : $\vec{AH} (1 + x, y)$; $\vec{CB} (1 - x, -(\alpha x + \beta))$.

On obtient finalement avec la formule analytique du produit scalaire $\vec{AH} \cdot \vec{CB}$ nul :

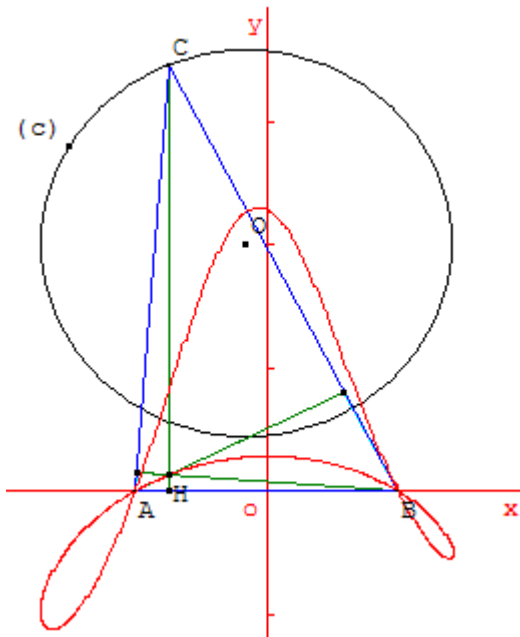
$$(1 + x)(1 - x) - y(\alpha x + \beta) = 0.$$

Soit

$$y = \frac{-x^2 + 1}{\alpha x + \beta}.$$

On obtient une hyperbole ?

c. C décrit une courbe d'équation $y = f(x)$



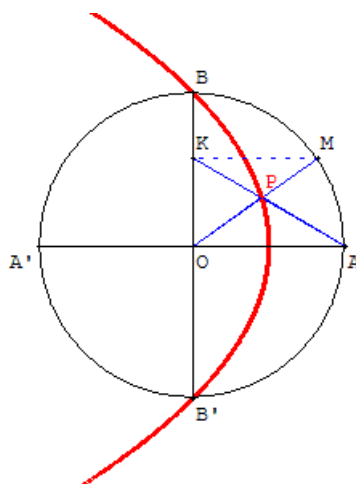
Jean Fages fait remarquer que les calculs réalisés au-dessus permettent d'affirmer que le lieu de H est la courbe d'équation

$$y = \frac{-x^2 + 1}{f(x)}$$

Exemple : C sur un cercle.

Bibliographie : Faisons bouger les centres
Jean Fages - bulletin APMEP n° 405.

12. Lieu de points

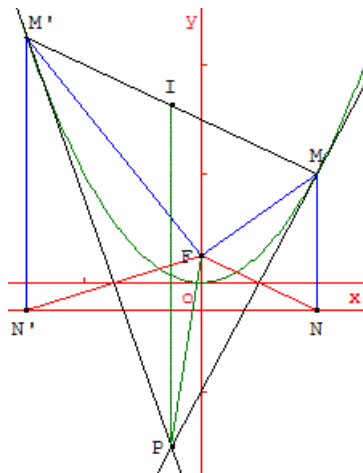


Soit un cercle (C) fixe de centre O, deux diamètres perpendiculaires [AA'] et [BB'] et M un point qui décrit le cercle sauf les points A et A'.

On projette orthogonalement le point M sur le segment [BB'] en K et on appelle P le point d'intersection des droites (OM) et (AK).

Montrer que le lieu du point P est la parabole de foyer O et directrice (d), tangente au cercle en A, privée de son sommet.

13. Théorèmes de Poncelet



M et M' sont deux points de la parabole.

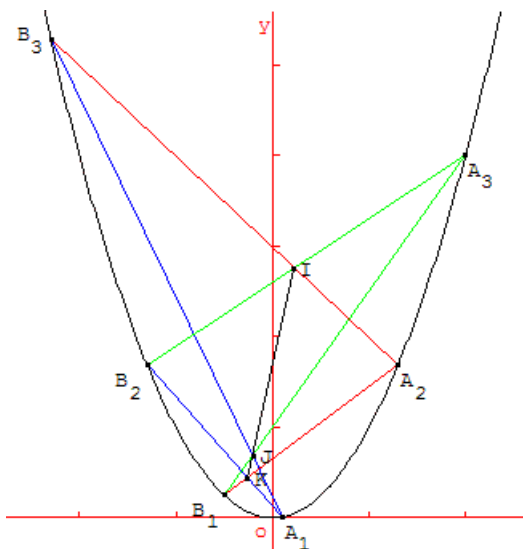
Les tangentes en M et M' à la parabole se rencontrent en P.

Si I est le milieu de $[MM']$, la droite (PI) est parallèle à l'axe de la parabole.

Premier théorème de Poncelet : (FP) est la bissectrice de l'angle MFM'.

Deuxième théorème de Poncelet : les angles FPM et IPM' sont égaux.

14. Théorème de Pappus-Pascal



On choisit sur une parabole six points A_1, A_2, A_3 et B_1, B_2, B_3 d'abscisses respectives a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 .

Les droites (A_2B_3) et (A_3B_2) se coupent en I,
les droites (A_1B_3) et (A_3B_1) se coupent en J,
les droites (A_1B_2) et (A_2B_1) se coupent en K.

Les points I, J, K sont alignés.