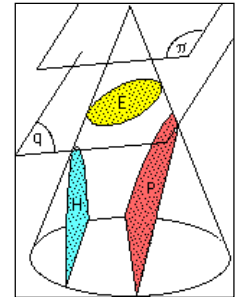


Cours sur les coniques

PAPPUS d'Alexandrie (grec, vers 300-360) dans un traité de huit volumes (le premier ne nous est pas parvenu) intitulé "Collection mathématique", fait état des connaissances de la mathématique grecque de son époque en y ajoutant des compléments. C'est grâce à Pappus que de nombreux travaux de mathématiciens grecs nous sont connus. Il s'intéressa aussi aux **coniques** reprenant des travaux d'**Apollonios** (Apollonius de Perge) et de Dioclès.

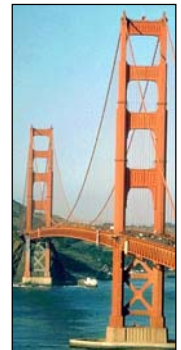
Théorème d'Apollonius : considérons un cône de révolution (ci-contre) et soit (p) le plan passant par le sommet du cône, parallèle au plan de section (q). Selon que (p) contient 0, 1 ou 2 génératrices, on obtient une ellipse (E) ou un cercle, une parabole (P) ou une hyperbole (H). En dehors du cercle, déjà bien connu, c'est à Apollonius que l'on doit ces appellations :



- **Parabole** : (du grec *parabolê* , para = à côté et *ballein* = lancer, jeter).

La parabole correspond à la trajectoire d'un projectile lancé et retombant à terre. Le terme est d'Apollonius de Perge.

Applications : mécanique, cinématique, chute des corps (Galilée), balistique (mouvement des projectiles), équation horaire des mobiles soumis à une accélération uniforme, astronomie (trajectoire apparente de certaines comètes n'appartenant pas au système solaire), cables des tabliers de ponts suspendus.(photo ci-contre)



le pont suspendu de San Francisco

- **Ellipse** : (du grec *ellipsis* = déficient, défectueux).

Pour Apollonius, cela correspond dans ses travaux, basés sur des considérations d'aires, à une caractéristique fondamentale : ce qu'on appelle depuis Kepler, l'excentricité. Elle est inférieure à 1 pour l'ellipse (déficiente) et supérieure à 1 pour l'hyperbole (excédente).



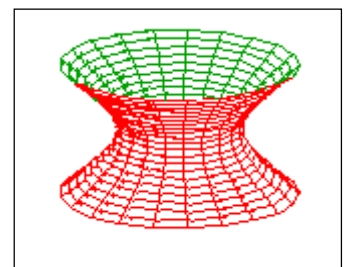
Le colisée de Rome

Hyperbole : (du grec *hyperbolê*, hyper = au-delà et *ballein* = lancer, jeter au-delà de toute limite).

De plus, *hyperballein* signifie aussi excéder, dépasser : ainsi, hyperbole apparaît antinomique à ellipse.

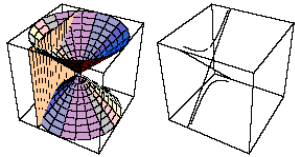


Tour d'une usine chimique

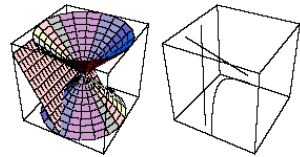


(hyperboloïde de révolution)

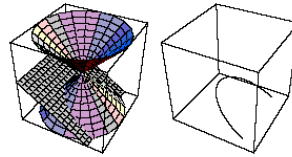
Définitions globales des coniques : Les coniques [l'hyperbole, l'ellipse (*dont le cercle peut être considéré comme un cas particulier*)] et la parabole, ont été découvertes par les mathématiciens grecs en tant qu'intersection d'un cône par un plan (du grec kônos).



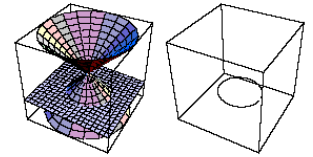
Hyperbole (2 branches visible)



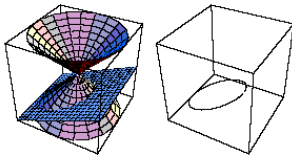
Hyperbole (1 branche visible)



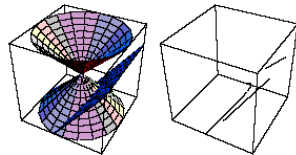
Parabole



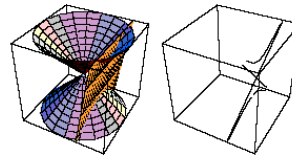
Cercle



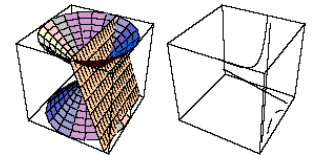
Ellipse



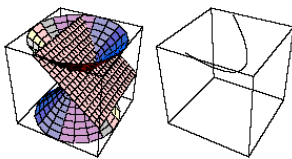
Parabole



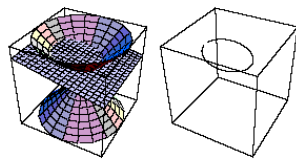
Hyperbole



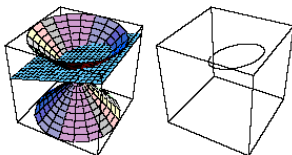
Hyperbole



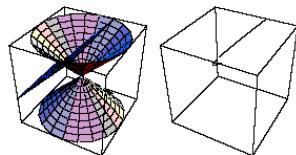
Parabole



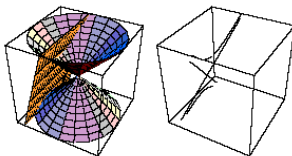
Ellipse



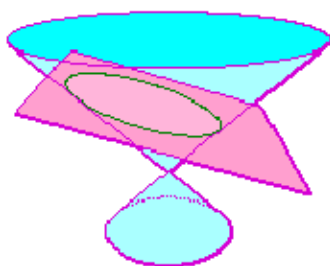
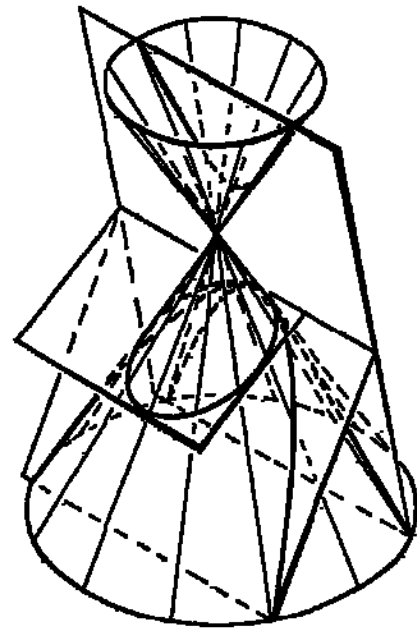
Ellipse



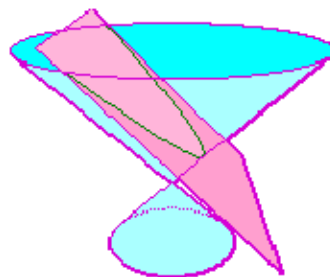
Parabole



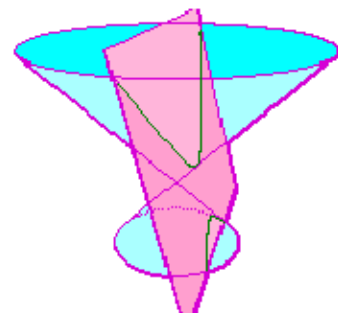
Hyperbole



Ellipse



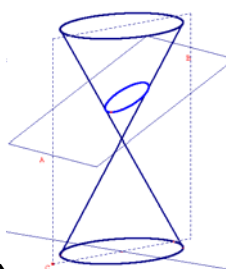
Parabole



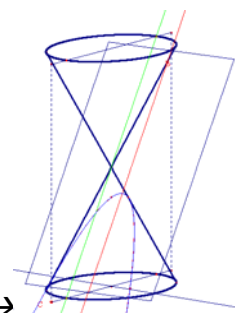
Hyperbole

Voir l'adresse suivante :

<http://www.cabri.net/abracadabri/Coniques/MAcosta/CnkSectionPlane.html>



Cliquer sur la figure →



Cliquer sur la figure →

	<u>Figure</u>
Exercice 1 : La parabole ♥ Construire une droite d (la directrice) et un point F (le foyer) ♥ Construire un point P sur la droite d ; ♥ Construire la droite d' perpendiculaire à d en P	
♥ Construire la médiatrice du segment $[PF]$, puis le point M , intersection de la droite d' et de la médiatrice $m_{[PF]}$; ♥ Construire le lieu du point M lorsque P parcourt d	
♥ Avec l'outil "Conique", construire une conique en cliquant cinq points sur le lieu précédemment construit ; ♥ En approchant le curseur de la courbe, un message indique que le logiciel reconnaît le lieu : c'est une parabole.	

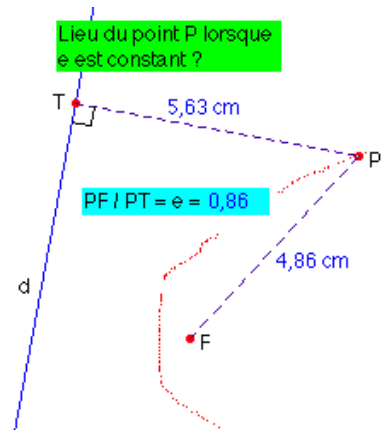
Exercice 2 : L'ellipse et l'hyperbole ♥ Construire deux points F_1 et F_2 (les foyers) et un cercle C centré en F_1 et de rayon $2a$, avec F_2 à l'intérieur du cercle C . ♥ Construire un point P sur le cercle C	
♥ Construire la droite (F_1P) et la médiatrice $m_{[F_2P]}$ et le point M , intersection des droites (F_1P) et $m_{[F_2P]}$; ♥ Construire le lieu du point M lorsque P parcourt le cercle C	
♥ Avec l'outil "Conique", construire une conique en cliquant cinq points sur le lieu précédemment construit ; ♥ En approchant le curseur de la courbe, un message indique que le logiciel reconnaît le lieu : c'est une ellipse.	
♥ En déplaçant le point F_2 en dehors du cercle C , on obtient une hyperbole.	

Thème : Les coniques – un point de vue général

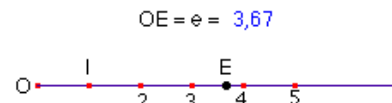
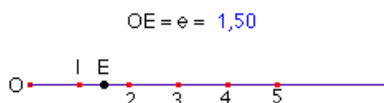
Soit une droite **d** et un point **F** ,
déterminer le lieu des points **P** du plan dont le rapport des distances de
ce point **P** au point **F** et à la droite **d** est constant et égal à un nombre **e**
donné, c'est à dire tels que $\frac{PF}{PT} = e$,

où $e \in [0, +\infty[$ et \mathbf{T} est le projeté orthogonal de \mathbf{P} sur la droite \mathbf{d} .

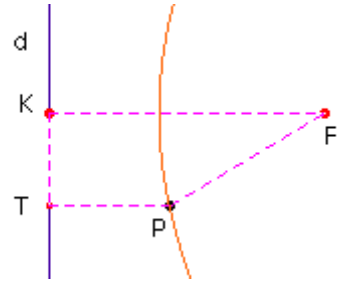
Cette fiche propose une recherche de construction de ce lieu par le biais de la géométrie élémentaire et des outils de Cabri II.



- 1) Construire sur une demi-droite $[OI]$, avec $OI = 1$, un point variable E de manière que le nombre $e = OE$ varie de O à $+\infty$ et que dans une fenêtre texte le nombre $OE = e$ s'actualise lors du déplacement de E sur la demi-droite $[OI]$.



- 2) Une droite d (plaçons la verticalement) et un point F étant donnés, on cherche tous les points P tels que $\frac{PF}{PT} = e$, c'est à dire tous les trapèzes rectangles PTKF dans lesquels F et K (K est le projeté orthogonal de F sur d) sont fixes et P et T varient de sorte que la propriété $\frac{PF}{PT} = e$ soit constamment vérifiée.



La construction de ce point P n'est pas élémentaire dans ce sens.

Inversons la construction : donnons-nous un point de base P' hors de d et on recherche un point F' tel que le trapèze P'T'K'F' vérifie $\frac{P'F'}{P'T'} = e$, où T' et K' sont les projetés orthogonaux de P' et F' sur la droite d. On peut commencer à rechercher s'il existe un tel point F' sur la droite (P'T').

Comme les données $\frac{P'F'}{P'T'} = e$ et P', F', T' et K' alignés se traduisent par

$$\ddot{\mathbf{P}}\mathbf{F}' = e \ddot{\mathbf{P}}\mathbf{T}' \text{ ou } \ddot{\mathbf{P}}\mathbf{F}' = -e \ddot{\mathbf{P}}\mathbf{T}',$$

on en déduit qu'il y a exactement deux points solutions F_1 et F_2 (symétriques par rapport à P') sur $(P'T')$.

Il est alors facile de voir que l'ensemble des points F' obéissant aux contraintes précédentes n'est autre que le cercle C de diamètre $[F_1 F_2]$. Pour obtenir un point courant P du lieu recherché, il suffit donc de prendre un point F' sur le cercle C et de construire l'image P de F' par l'homothétie qui transforme F' en F et K' en K . On peut à présent construire le lieu du point P lorsque F' décrit le cercle C .

On peut construire une conique (avec l'outil conique) en « collant » cinq points sur le lieu obtenu et en approchant le curseur lire « cette ellipse » lorsque $0 < e < 1$, « cette parabole » lorsque $e = 1$ et « cette hyperbole » lorsque $e > 1$. On peut même afficher l'équation de la conique dans un système d'axes au choix.

