70 *Démontrer si* $A \neq B$, *que* $\{M \in \mathbb{P} \mid \overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$ et $\alpha \geq 0\} = [A,B)$.

71 *Dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *on donne* $A(-1; 2)$ *et* $B(3; 1)$. *Commet choisir* x *et* y *si* $M(x, y) \in (AB)$?

72 *On donne* $F = \{M(x, y) \in \mathbb{P} \mid y = 4x - 1\}$ *avec* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *repère du plan. Les points* $O(0; 0)$, $B(\frac{1}{4}; 0)$, $C(1; 3)$, $D(2; 6)$, $E(\frac{8}{5}; \frac{3}{5})$ *sont-ils éléments de* F ?

6 Homothétie et similitude

La géométrie étudie les transformations des figures en recherchant les propriétés conservées, les points invariants.

Exercice 73

Citer des propriétés conservées par la rotation, la translation, la symétrie centrale, l'isométrie. Toutes les transformations dans le plan conservent-elles la distance?
Comment définir une transformation dans le plan? Proposer une définition d'une "dilatation", d'une "contraction".

Définition 18 On appelle **homothétie** de centre A et de rapport r $(r \neq 0)$ l'application

$$\mathcal{H}_{(A,r)} : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$$

$$M \mapsto M' = \mathcal{H}_{(A,r)}(M) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM'} = r \cdot \overrightarrow{AM}$$

Exercice 74

Soit $\mathcal{H}_{(0,2)} : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ *et* $\mathcal{H}_{(0,2)}(M) = M'$. *Si* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *est un repère du plan, dessiner l'image des points suivants,* $A(3; 1)$, $B(-2; -\frac{2}{3})$, O, $C(3; 3)$, $D(-1; \frac{5}{3})$, $E(6; 4)$. *Comment sont transformés ces points par* $\mathcal{H}_{(0,\frac{1}{2})}$?

THEOREME 18 Une homothétie est une bijection.

***Exercice** 75*

Avec $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *repère du plan,* A(- 1; 2) , B(3, 1) , C(- 8; 2) , D(1; 1) , *dessiner* B' *et* B" *si* B' = $\mathcal{H}_{(0,\frac{1}{4})}$(B) *et* B" = $\mathcal{H}_{(0,4)}$(B') . *Même question avec* C' et C", A' *et* A", D' et D", O' et O".

THEOREME 19 Le composé de deux homothéties de même centre A et de rapports respectifs r_1 et r_2 est l'homothétie de centre A et de rapport $r_1 \cdot r_2$.

THEOREME 20 L'homothétie de rapport 1 est l'identité.
Le seul point fixe d'une homothétie de rapport différent de 1 est son centre.

THEOREME 21 Par une homothétie $\mathcal{H}_{(A,r)}$:

1. le rapport de colinéarité de deux vecteurs est conservé;
2. les distances sont multipliées par le facteur constant $|r|$;
3. le centre, un point et son image sont sur une droite;
4. une droite passant par le centre est globalement invariante;
5. toute droite a pour image une droite parallèle;
6. l'image d'une demi-droite est une demi-droite;
7. le parallélisme et l'orthogonalité sont conservés;
8. les mesures des angles sont conservées.