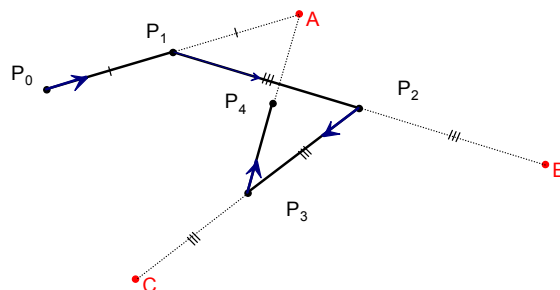


Cours n°1 : Expérimenter avec Cabri-géomètre : l'amoureux indécis-solution
L'amoureux indécis

Joe est amoureux de trois filles en même temps : Alice, Béatrice et Clarisse qui habitent respectivement aux points A, B et C. Quittant son domicile au point P_0 , Joe décide d'aller voir Alice et prend donc la direction du point A. Arrivé au point P_1 , à mi-chemin entre P_0 et A, Joe change d'avis et choisit de se rendre plutôt chez Béatrice. Mais, rendu au point P_2 , à mi-chemin entre P_1 et B, Joe décidément, très indécis, se ravise et prend maintenant la direction de chez Clarisse. Devinez alors ce qui arrive : pris de remords à mi-chemin, Joe change de cap en P_3 pour reprendre sa première idée (aller chez Alice), puis en P_4 , milieu de $[P_3, B]$, il préfère Béatrice, etc...(voir figure ci-contre).
Etudier la trajectoire suivie par Joe.



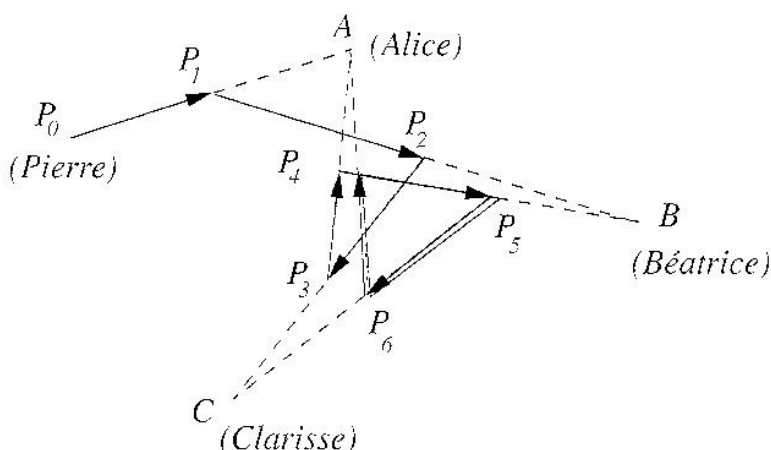
[Ouvrir la figure cabri-géomètre !](#)

L'amoureux

indécis

Que fait-on lorsqu'on désire se rendre à trois endroits à la fois ? Si l'indécision doit mener quelque part, encore faut-il savoir où. Voyons comment converge la trajectoire de l'amoureux indécis...

Pierre est amoureux de trois jeunes filles en même temps : Alice, Béatrice et Clarisse, qui habitent respectivement aux points A, B et C... Quittant son domicile au point P_0 , Pierre décide d'aller voir Alice et prend donc la direction du point A. Arrivé au point P_1 , à mi-chemin entre P_0 et A, Pierre change d'avis et choisit de se rendre plutôt chez Béatrice. Mais, rendu au point P_2 , à mi-chemin entre P_1 et B, Pierre décidément très indécis se ravise, et prend maintenant la direction de chez Clarisse. Devinez alors ce qui arrive : pris de remords à mi-chemin, Pierre change de cap en P_3 pour reprendre sa première idée (aller chez Alice), puis en P_4 , milieu de $[P_3B]$, il préfère Béatrice, etc... (voir figure ci-contre).



Une trajectoire singulière

La trajectoire suivie par Pierre tout au long de ses hésitations est donc une ligne brisée $P_0, P_1, \dots, P_n, P_{(n+1)}, \dots$ qui peut être définie de la façon suivante.

À chaque fois que n est un multiple de 3 ($n=3k$ pour un certain entier k), $P_{(n+1)}$ est le milieu de $[P_n A]$, puis $P_{(n+2)}$ est le milieu de $[P_{(n+1)} B]$, et enfin $P_{(n+3)}$ est le milieu de $[P_{(n+2)} C]$.

Si vous tentez de reconstituer le chemin de Pierre, vous observerez que sa trajectoire se stabilise et converge vers un triangle, noté DEF. Remarquez de plus que l'itinéraire de Pierre finirait par approcher le triangle DEF même s'il était parti directement de chez ses parents plutôt que de son domicile.

Un triangle indépendant du point de départ

En effet, le triangle DEF est indépendant du point de départ P_0 de Pierre. Essayons de voir pourquoi.

On passe du point $P_{(3k)}$ au point $P_{(3k+1)}$ par l'homothétie $h_{(A, 1/2)}$ de centre A et de rapport 1/2.

De même, on va de $P_{(3k+1)}$ à $P_{(3k+2)}$ par l'homothétie $h_{(B, 1/2)}$ et de $P_{(3k+2)}$ à $P_{(3k+3)}$ par l'homothétie $h_{(C, 1/2)}$. Comme la composée de plusieurs homothéties est encore une homothétie de rapport le produit des homothéties initiales lorsque celui-

ci est différent de 1, il existe 3 points D, E et F tels que

$$h_{(C,1/2)} \circ h_{(B,1/2)} \circ h_{(A,1/2)} = h_{(D,1/8)},$$

$$h_{(A,1/2)} \circ h_{(C,1/2)} \circ h_{(B,1/2)} = h_{(E,1/8)}$$

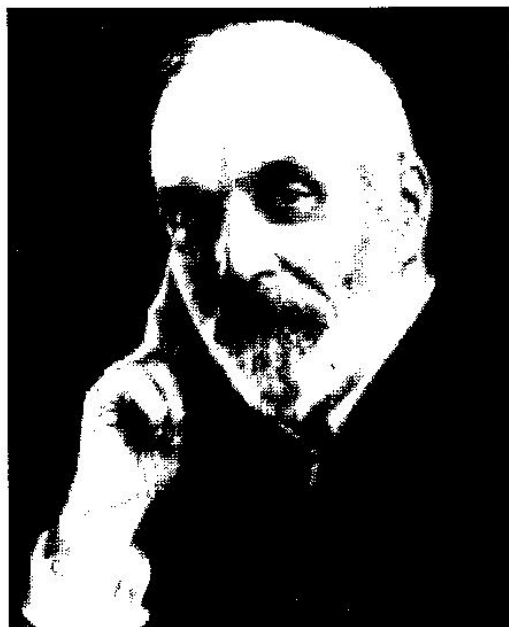
$$\text{et } h_{(B,1/2)} \circ h_{(A,1/2)} \circ h_{(C,1/2)} = h_{(F,1/8)}.$$

On passe donc de $P_{(n)}$ à $P_{(n+1)}$ par $h_{(D,1/8)}$, $h_{(E,1/8)}$ ou $h_{(F,1/8)}$, selon que n est de la forme $n=3k$, $n=3k+1$ ou $n=3k+2$. Finalement, on a montré qu'on allait de P_0 à $P_{(3k)}$ par l'homothétie de centre D et de rapport $1/8^k$, de P_1 à $P_{(3k+1)}$ par l'homothétie de centre E et de rapport $1/8^k$ et de P_2 à $P_{(3k+2)}$ par l'homothétie de centre F et de rapport $1/8^k$.

Lorsque k tend vers l'infini, $1/8^k$ tend vers 0. On conclut alors que les points $P_{(3k)}$, $P_{(3k+1)}$ et $P_{(3k+2)}$ convergent vers D, E et F respectivement. Les points limites sont donc indépendants de P_0 .

Une construction du "triangle de Dudeney"

Pour construire rapidement le triangle limite DEF, appelé "triangle de Dudeney", on peut utiliser la propriété suivante : soient A', B' et C' les points situés respectivement sur [BC], [AC] et [AB] tels que $CA' = BC/3$, $AB' = AC/3$, et $BC' = AB/3$. Le triangle de Dudeney DEF est celui formé par les trois droites (AA'), (BB'), (CC') (voir figure ci-dessous). Ce résultat peut lui aussi être démontré en raisonnant sur des homothéties.

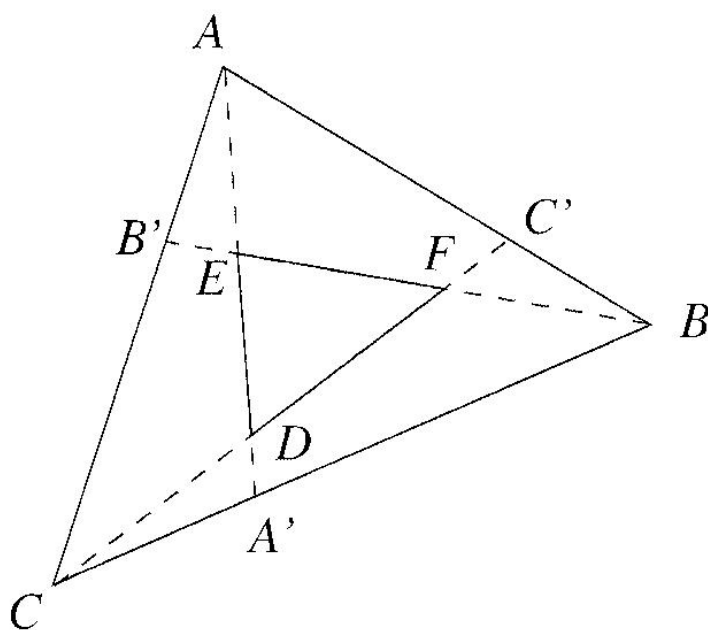


Henri Ernest Dudeney

Pour plus de détails, et pour découvrir d'autres propriétés du triangle de Dudeney, vous pouvez consulter le site internet suivant :

<http://www.univ-rouen.fr/LMRS/Vulgarisation/Dudeney/dudeney.html>

É.J. et T.R.



Le triangle de Dudeney