3.12 On donne les vecteurs suivants :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{h} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1) Calculer

$\vec{a} \bullet \vec{c}$, $\vec{a} \bullet \vec{e}$, $\vec{b} \bullet \vec{d}$, $\vec{b} \bullet \vec{f}$, $\vec{c} \bullet \vec{g}$, $\vec{c} \bullet \vec{k}$, $\vec{e} \bullet \vec{f}$,
$(\vec{a} + \vec{f}) \bullet (\vec{g} - \vec{h})$, $\vec{d} \bullet (\vec{e} - \vec{f})$, $\vec{g} \bullet (\vec{h} + 2\vec{k})$,
$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \bullet (\vec{d} - 2\vec{h} + \vec{f})$.

2) Dans l'ensemble des vecteurs donnés, trouver les paires de vecteurs orthogonaux.

3.13 Montrer que le quadrilatère $ABCD$ dont les sommets sont $A(0;2)$, $B(6;6)$, $C(8;3)$ et $D(2;-1)$ est un rectangle.

3.14 On donne les points $A(-4;-3)$, $B(2;0)$ et $C(0;4)$. Montrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires. Déterminer le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

3.15 Déterminer le nombre réel λ pour que le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \end{pmatrix}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

3.16 Soit les deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$. Déterminer un nombre réel λ et un vecteur $\vec{v}$ tels qu'on ait :

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} + \vec{v} \quad \textbf{et} \quad \vec{v} \perp \vec{a} \quad .$$

3.17 Calculer les composantes d'un vecteur $\vec{b}$ orthogonal au vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ et tel que $\| \vec{b} \| = \dfrac{13}{2}$.

3.18 On donne les points $A(2;1)$ et $B(3;-5)$.

1) Déterminer les sommets C et D d'un carré $ABCD$ dont $[AB]$ est un côté.

2) Déterminer les sommets P et Q d'un carré $APBQ$ dont $[AB]$ est une diagonale.

3.19 Soit les points $A(0;4)$, $B(3;-2)$, $C(-3;4)$ et $D(-6;-4)$. Déterminer le point P de la droite (CD) équidistant de A et de B.

3.20 On donne les deux points $B(3;4)$ et $C(1;-2)$. Trouver un point A tel que le triangle ABC soit rectangle et isocèle en A.

3.21 On donne les points $A(-2;4)$, $B(1;-2)$ et $C(\lambda;\lambda)$. Pour quels nombres réels λ le triangle ABC est-il rectangle ? Parmi les solutions, trouve-t-on des cas où le triangle est également isocèle ?

3.22 On donne les points $A(1;4)$, $B(5;2)$ et $C(\lambda;5)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer tous les points C du plan tels que le triangle de sommets A, B et C soit un triangle rectangle. Parmi les triangles trouvés, en est-il qui sont isocèles ?

3.23 On donne les trois points $A(2;3)$, $P(10;-3)$ et $Q(4;9)$.

1) Trouver deux points B et C sur la droite (PQ) tels que le triangle ABC soit isocèle en A et que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 5$.

2) Trouver deux points D et E de la droite (PQ), ainsi qu'un point F, tels que le quadrilatère $ADEF$ soit un carré.

3.24 On donne les points $A(0;0)$ et $B(6;6)$. Trouver deux points C et D tels que le quadrilatère $ACBD$ soit un losange dont la diagonale $[CD]$ a une longueur double de celle de la diagonale $[AB]$.

3.25 Soit les points $A(0;0)$, $B(0;3)$, $C(3;4)$ et $D(4;0)$. Trouver les milieux respectifs R, S, T et U de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ et montrer qu'ils sont les sommets d'un carré.

3.26 OAB est un triangle équilatéral de côté a , $a > 0$.

On considère les points M et N tels que

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ON} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} .$$

Montrer qu'il existe deux points P du côté $[AB]$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P .

3.27 Peut-on déduire de l'égalité $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \vec{c}$ que $\vec{b} = \vec{c}$?

La réponse change-t-elle si l'on sait de plus que :

1) $\|\vec{b}\| = \|\vec{c}\|$?

2) l'égalité est vraie quel que soit le vecteur $\vec{a}$?

3.28 En développant $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} + \vec{b})$, établir la relation

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2\right) .$$

En déduire que le produit scalaire ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

3.29 Montrer que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

3.30 Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non colinéaires. Montrer que l'on a

$$(\vec{a} - \vec{b}) \bullet (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| .$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

3.31 Démontrer que, quels que soient les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, on a :

1) $|\vec{a} \bullet \vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)

2) $\vec{a} \bullet \vec{b} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2\right)$

3) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (inégalité triangulaire)

3.32 On considère les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{i_1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{j_1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que $(\vec{i_1} ; \vec{j_1})$ est une base orthonormée et exprimer $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans cette base.

2) Calculer $\vec{a} \bullet \vec{b}$ lorsque :

   a) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont exprimés dans la base $(\vec{i} ; \vec{j})$

   b) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont exprimés dans la base $(\vec{i_1} ; \vec{j_1})$.

Que constate-t-on ?

3.33 Soit $(\vec{a} ; \vec{b})$ une base de $\boldsymbol{V}_2$, $\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b}$ et $\vec{d} = \beta_1\vec{a} + \beta_2\vec{b}$.

On considère l'application f de $\boldsymbol{V}_2 \times \boldsymbol{V}_2$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(\vec{c} ; \vec{d}) = \alpha_1\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 4\,\alpha_2\beta_2$$

1) Montrer que f est une multiplication scalaire et calculer le produit scalaire $f(\vec{a} ; \vec{b})$.

   Indication : montrer que f vérifie les propriétés 4.3 .

2) Quelle est la norme associée à la multiplication scalaire f ? Calculer $\|\vec{a}\|$ et $\|\vec{b}\|$.

3) Montrer que, relativement à la multiplication scalaire f, le vecteur $5\vec{a} - 2\vec{b}$ est orthogonal au vecteur $\vec{a} + \vec{b}$. Représenter géométriquement ces vecteurs.

3.34 Soit $(\vec{a} ; \vec{b})$ une base de $\boldsymbol{V}_2$, $\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b}$ et $\vec{d} = \beta_1\vec{a} + \beta_2\vec{b}$.

L'application g de $\boldsymbol{V}_2 \times \boldsymbol{V}_2$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$g(\vec{c} ; \vec{d}) = \alpha_1\beta_1 + 2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 3\,\alpha_2\beta_2$$

vérifie les propriétés 1 , 2 et 3 de la multiplication scalaire.

3.38 Soit A et B deux points tels que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont linéairement indépendants, et C un point distinct de O , A et B . Déterminer les ensembles de points suivants :

1) $\{ M \mid \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} \}$

2) $\{ M \mid \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}$ **et** $\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OC} \}$

3.39 On considère les points $A(-2;1)$, $B(1;\frac{5}{2})$ et $C(1;-1)$.
Déterminer le point M de la droite (OC) dont la projection orthogonale sur la droite (AB) est le point $M'(0;2)$.

3.40 On considère les points $A(-3;1)$, $B(2;6)$ et la droite d passant par O et par $D(2;1)$. A' et B' étant les projections orthogonales de A et de B sur la droite d , calculer $\| \overrightarrow{A'B'} \|$. En déduire l'aire du trapèze $AA'B'B$.

3.41 Démontrer les théorèmes suivants :

1) Si B' est la projection orthogonale d'un point B sur une droite (OA) , alors :

$$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OB'} = \frac{\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}}{\| \overrightarrow{OA} \|^2} \overrightarrow{OA}$$

2) La distance d'un point M à une droite (AB) est donnée par

$$\delta(M,(AB)) = \frac{| \overrightarrow{AM} \bullet \vec{n} |}{\| \vec{n} \|} ,$$

où $\vec{n}$ est un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

3.42 Soit B l'image d'un point A par la symétrie orthogonale d'axe (OD) .
Montrer que

$$\overrightarrow{OB} = 2 \left(\frac{\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OD}}{\| \overrightarrow{OD} \|^2} \right) \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$$

3.43 On donne trois points C , D et M .

1) Calculer la distance de M à la droite (CD) dans les cas suivants :

a) $C(8;-1)$, $D(2;7)$, $M(7;17)$

b) $C(-3;9)$, $D(2;-3)$, $M(19;-10)$

2) Calculer les coordonnées de la projection orthogonale M' de M sur la droite (CD), ainsi que celle du symétrique N de M par rapport à (CD).

3.44 On donne deux droites d_1 et d_2. Montrer que d_1 est parallèle à d_2 et calculer la distance entre ces droites dans les cas suivants :

1) d_1 passe par $(2\,;1)$ et $(1\,;-1)$ et d_2 passe par $(0\,;1)$ et $(1\,;3)$.

2) d_1 passe par $(1\,;1)$ et $(-2\,;2)$ et d_2 passe par $(1\,;-2)$ et $(4\,;-3)$.

3.45 On donne les points $A(4\,;4)$ et $B(-2\,;3)$.

Trouver le centre et le rayon du cercle qui passe par A et qui est tangent à la droite (OB) en O.

3.46 On donne deux points A et B, ainsi qu'une droite d par deux de ses points P et Q.

Trouver les centres C et les rayons r des cercles passant par A et B et qui sont tangents à d, dans les cas suivants :

1) $A(5\,;2)$ $\quad B(1\,;4)$ $\quad P(0\,;0)$ $\quad Q(0\,;1)$

2) $A(2\,;-\frac{3}{2})$ $\quad B(4\,;\frac{5}{2})$ $\quad P(\frac{15}{2}\,;2)$ $\quad Q(\frac{23}{2}\,;5)$

3.47 On donne quatre points A, B, C et D.

Trouver les centres des cercles centrés sur la droite (CD), tangents à la droite (AB) et de rayon r donné, dans les cas suivants :

1) $A(-\frac{1}{2}\,;-1)$ $\quad B(1\,;2)$ $\quad C(0\,;0)$ $\quad D(3\,;1)$ $\quad r = \sqrt{5}$

2) $A(-\frac{5}{2}\,;-\frac{7}{2})$ $\quad B(\frac{11}{2}\,;\frac{5}{2})$ $\quad C(-1\,;2)$ $\quad D(3\,;0)$ $\quad r = \frac{5}{2}$

3.48 Soit ABC un triangle rectangle en A. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}$ par projection sur un axe de même direction que $\overrightarrow{BA}$, puis par projection sur un axe de même direction que $\overrightarrow{BC}$.

Quel théorème retrouve-t-on ainsi ?