2 F arts corrigé Lundi 11 mai 2020

Examen de mathématique

(Géométrie analytique plane)

1) Répondre de manière claire et précise dans un français correct :

2 a) Qu'est-ce qu'une base ?

4 2 b) Qu'est-ce qu'un repère ?

2) Compléter les … avec les notions vues au cours des §4-5 :

a) 1 M milieu du segment [A,B] et $A(a_1 ;a_2)$ et $B(b_1 ;b_2)$ $\Leftrightarrow$ …

3 b) 1 $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $A(a_1 ;a_2)$ et $B(b_1 ;b_2)$ $\Leftrightarrow$ …

c) 1 $\overrightarrow{OM} = \binom{a}{b}$ dans le repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ $\Leftrightarrow$ …

3) On donne un trapèze ABCD avec (AB) // (CD),
M_1 milieu de [A,B] et M_2 milieu de [D,C]. De plus on donne DC = 2AB.

10 3 **Faire une figure d'étude claire et précise.**

1 1 2 1 1 1

7 Dans le repère $\mathscr{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, donner les coordonnées des points A, B, C, D, M_1, M_2.

4) Dans la base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{d} = \begin{pmatrix} z-1 \\ z^2 \end{pmatrix}$$

a) 2 Le couple $(\vec{a}, \vec{b})$ est - il une base de $\mathscr{V}_2$?

11 5 Si oui, calculer x et y si $\vec{c} = \binom{x}{y}$ dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$.

b) 4 Calculer z pour que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{d}$ soient colinéaires.

5) Dans un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A (1,1) , B (4,-2) et C (-5,4) .

2 a) Les points A, B et C sont-ils alignés ? (à prouver sans figure !)

2 b) Calculer les coordonnées du point E, milieu du segment [A,C] ;

2 c) Calculer x et y si le point D(x,y) est tel que ABCD est un parallélogramme ;

11 3 d) Calculer une équation de la droite (AB) ;

2 e) Le point C appartient-il à la droite d d'équation : 3x + 2y + 7 = 0 ? (à prouver sans figure)

39 pts

1a)

2 **Définition 12** Une **base** de $\mathcal{V}_2$ est un couple de vecteurs **non colinéaires .**

1b)

4

Définition 14 On appelle **repère** du plan un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $O \in \mathbf{P}$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de

2 $\mathcal{V}_2$. Le point O se nomme **origine** du repère .

2) Compléter les … avec les notions vues au cours des §4-5 :

3

a) M milieu du segment [A,B] et A(a_1 ;a_2) et B(b_1 ;b_2) $\Leftrightarrow$ $M\left(\frac{a_1+b_1}{2} ; \frac{a_2+b_2}{2}\right)$ 1

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et A(a_1 ;a_2) et B(b_1 ;b_2) $\Leftrightarrow$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ 1

c) $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ $\Leftrightarrow$ M(a ;b) 1

3) Données : $\begin{cases} * \text{ un trapèze } ABCD \\ \text{avec } (AB) \parallel (CD) \\ \text{et } DC = 2AB \quad \text{et } M_2 \text{ milieu de } [D,C] \\ * \ \mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \text{ et } M_1 \text{ milieu de } [A,B] \end{cases}$

Calculer les coordonnées de A, B, C, D, M_1, M_2 :

On a : 1 A(0,0) origine du repère

1 B(1,0) extrémité du 1er vecteur de base $\overrightarrow{AB}$

1 D(0,1) " 2e " " $\overrightarrow{AD}$

1 $M_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ milieu de [A,B] avec A(0,0) et B(1,0)

1 $M_2(1,1)$ " de [D,C] avec D(0,1) et C(2,1)

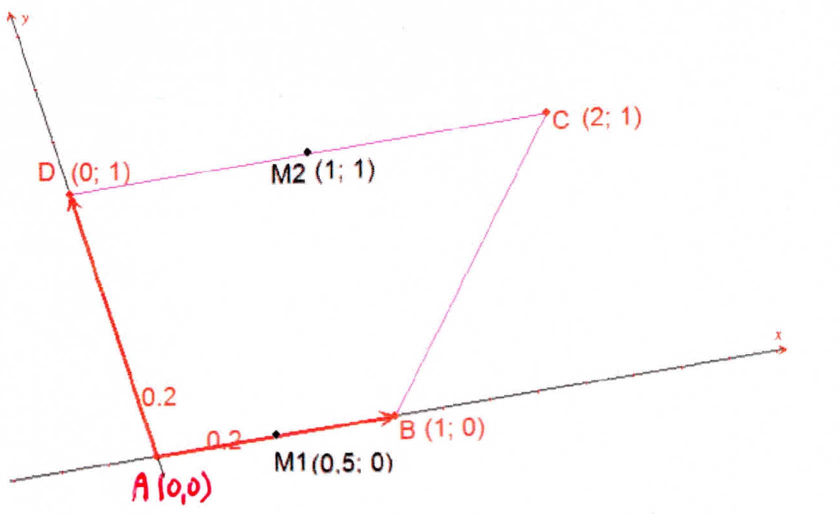
2 où C(2,1)

car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (DC) \parallel (AB)$ et $DC = 2AB$)

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

10

3



Exercice 4 : Données : $\begin{cases} * \ \mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}) \text{ une base de } V_2 \\ * \ \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{d} = \begin{pmatrix} z-1 \\ z^2 \end{pmatrix} \end{cases}$

a) 2 $(\vec{a}, \vec{b})$ est une base car $\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6-2 = 4 \neq 0$ et donc

$\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont non colinéaires.

d'où $\vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{1}{=} x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (lu dans la base $\mathcal{B}$)

5 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ -x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$ 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \\ D_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -10 \\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -6 \end{cases}$ et $x = 5$, $y = 3$ réponse : $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ds la base $(\vec{a}, \vec{b})$.

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} z-1 \\ z^2 \end{pmatrix}$ colinéaires

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & (z-1) \\ -1 & z^2 \end{vmatrix} \overset{1}{=} 0 \Leftrightarrow 2z^2 + z - 1 = 0$ 1 ou $\Delta = 1 + 8 = 9$ et $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$ $\left(\dfrac{-1-3}{4} ; \dfrac{-1+3}{4} \right)$

$\Leftrightarrow 2z^2 + 2z - z - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2z(z+1) - (z+1) = 0$ et $z \in \{-1 ; \frac{1}{2}\}$

4 $\Leftrightarrow (z+1)(2z-1) = 0$ 2

$\Leftrightarrow z \in \{-1 ; \frac{1}{2}\}$

11

* Exercice 5 :

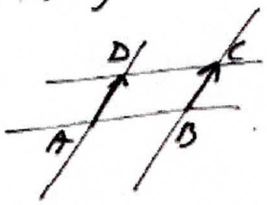
Données : * $\mathcal{R}$ un repère et $A(1,1)$, $B(4,-2)$ et $C(-5,4)$

a) A, B, C alignés $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 18 = -9 = 0$ ce qui est faux

2 donc A, B, C non alignés

2 b) E milieu de $[A,C]$ $\Rightarrow E\left(\frac{1-5}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = E\left(-2, \frac{5}{2}\right)$

c) Soit $D(x,y)$ et $ABCD$ parallélogramme



$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$

2 $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -9 \\ y - 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 7 \end{cases}$ réponse : $D(-8, 7)$

d) équation de la droite (AB) :

Soit $M(x,y) \in (AB) \Leftrightarrow A, B, M$ alignés $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 0$

3 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & (x-1) \\ -3 & (y-1) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(y-1) + 3(x-1) = 0$) : 3

$\Leftrightarrow (y-1) + (x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x + y - 2 = 0$

réponse : $(AB) : x + y - 2 = 0$

e) $C(-5,4) \in d$ où $d : 3x + 2y + 7 = 0$

2 si ses coordonnées vérifient l'équation de d :

Soit $3\overset{-5}{x} + 2\overset{4}{y} + 7 = -15 + 8 + 7 = 0$

donc oui, $C \in d$

11