5 Repère du plan

Définition 14 On appelle **repère** du plan un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $O \in \mathbf{P}$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$. Le point O se nomme **origine** du repère.

Définition 15 On appelle **coordonnées** d'un point M du plan dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les composantes du vecteur $\vec{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. La première coordonnée se nomme **abscisse** de M et la seconde **ordonnée**.

Notation : $\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \Leftrightarrow M(x,y)$

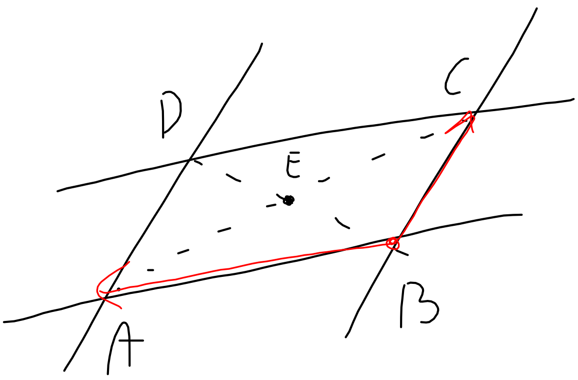
$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

fig

Notation : $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit le repère $\mathcal{R}_2 = (B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$:

d'où $A(\; , \;)$
$B(\; , \;)$
$C(\; , \;)$
$D(\; , \;)$
$E(\; , \;)$



Avec Cabri-géomètre

Soit le repère $\mathcal{R}_2 = \left(B , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BA} \right)$:

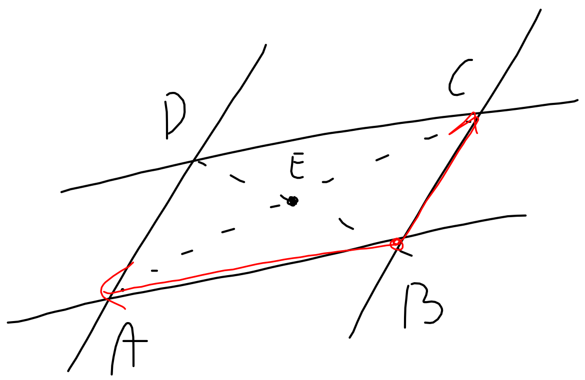
d'où $A(0,1)$

$B(0,0)$

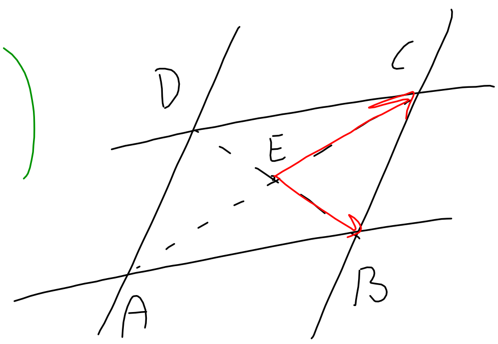
$C(1,0)$

$D(1,1)$

$E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$



Soit $\mathcal{B}_3 = (E, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC})$



alors $A(\quad , \quad)$ car ...

$B(\quad , \quad)$

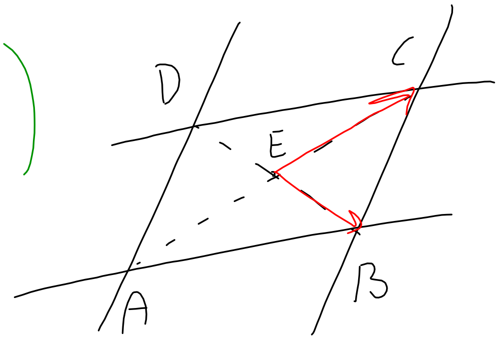
$C(\quad , \quad)$

$D(\quad , \quad)$

$E(\quad , \quad)$

Avec Cabri-géomètre

Soit $\mathcal{B}_3 = \left(E, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}\right)$



alors $A(0, -1)$ car ...
$B(1, 0)$
$C(0, 1)$
$D(-1, 0)$ car $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BE} = (-1)\cdot\overrightarrow{EB} + 0\cdot\overrightarrow{EC}$
$E(0, 0)$ $=: \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

THEOREME 15 Si dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ alors:

1. $\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

2. M milieu de $[A,B]$ $\Leftrightarrow$ $M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

THEOREME 15 Si dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ alors:

1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$
2. M milieu de $[A,B]$ $\Leftrightarrow$ $M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$.

H $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$

T a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

et b) M milieu de $[A,B] \Leftrightarrow M\left(\frac{a_1+b_1}{2} ; \frac{a_2+b_2}{2}\right)$

D a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ (Charles)

$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (EV)

$= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ par H et déf.

$= \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ (exe 58)

cqfd

b) M milieu de $[A,B] \overset{\text{Thm}}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

$\overset{a)}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - x \\ b_2 - y \end{pmatrix}$ où $M(x, y)$

$\overset{\text{Thm 13}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - a_1 = b_1 - x \\ \text{et} \\ y - a_2 = b_2 - y \end{cases} \overset{\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = \frac{a_1+b_1}{2} \\ \text{et} \\ y = \frac{a_2+b_2}{2} \end{cases}$

cqfd

***Exercice** 66*

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$*, on donne* A(1; 2) *et* B(-3; -1). ***Trouver*** **x,** y *et* z *si* M(x, 0) $\in$ (AB) *et* N(0, y) $\in$ (AB) *et* D(z, 2) $\in$ (AB). *A-t-on* E(3; 3) $\in$ (AB) ?

Exercice 66

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *on donne* A(1; 2) *et* B(-3; -1). *Trouver* x, y *et* z *si* M(x, 0) ∈ (AB) *et* N(0, y) ∈ (AB) *et* D(z, 2) ∈ (AB). *A-t-on* E(3; 3) ∈ (AB) ?

Données :
- $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$
- $A(1;2)$ et $B(-3;-1)$
- $M(x,0) \in (AB)$, $N(0,y) \in (AB)$
- $D(z,2) \in (AB)$.
- $E(3,3) \in (AB)$?

Résolution : Calculer x si $M(x,0) \in (AB)$:

$M \in (AB) \iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ colinéaires

thm 14

$\iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} (x-1) & -3-1 \\ (0-2) & -1-2 \end{vmatrix} = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x-1 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \iff (-3)(x-1) - 8 = 0$

$\iff -3x + 3 - 8 = 0 \iff -3x = 5$

$\iff x = -\frac{5}{3}$ réponse : $x \in \left\{-\frac{5}{3}\right\}$

* $N(0,y) \in (AB) \iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}$ colin.

$\iff \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} -4 & 0-1 \\ -3 & y-2 \end{vmatrix} = 0 \iff (-4)(y-2) - 3 = 0$

$\iff -4y + 5 = 0 \iff y \in \left\{ \frac{5}{4} \right\}$

* $D(z,2) \in (AB) \iff \det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} z-1 & -4 \\ 2-2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \iff (-3)(z-1) - 0 = 0$

$\iff z = 1 \iff z \in \{1\}$

* $E(3;3) \in (AB) \iff \det(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} 3-1 & -4 \\ 3-2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \iff -6+4$
$= -2 \neq 0$

donc $E \notin (AB)$.

THEOREME 16 Si $(A,B) \in \mathbf{P}^2$ et $A \neq B$, alors $(AB) = \{ M \in \mathbf{P} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \}$.

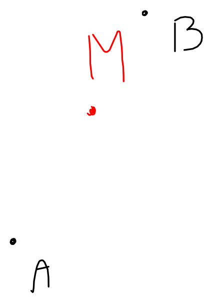
H $(A,B) \in \mathbb{P}^2$, $A \neq B$

T $M \in (AB) \iff$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$

(lamda)

D cf thm 10 cqfd



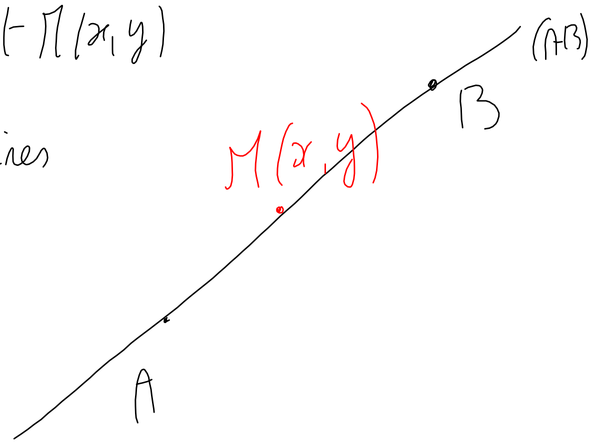
$\ast$ Equations d'une droite :

Soit $\{A, B\} \subset \mathcal{P}$ et la droite $(AB) = d$

Soit un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$

et $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$

Alors $M \in (AB)$ et $M(x, y)$



$\Leftrightarrow$ $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ colinéaires

$\Leftrightarrow \det(\vec{AM}, \vec{AB}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} (x-a_1) & (b_1-a_1) \\ (y-a_2) & (b_2-a_2) \end{vmatrix} = 0$$

$-$

$$\Leftrightarrow (x-a_1)\cdot(b_2-a_2) - (y-a_2)(b_1-a_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b_2-a_2)\cdot x - (b_1-a_1)\cdot y + (-a_1 b_2 + \cancel{a_1 a_2} + a_2 b_1 - \cancel{a_1 a_2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(b_2-a_2)}_{a}\cdot x + \underbrace{(a_1-b_1)}_{b}\cdot y + \underbrace{(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}_{c} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad a\cdot x + b\cdot y + c = 0$$

et $(a, b) \neq (0, 0)$

On appelle cette équation, <u>une</u> équation <u>cartésienne</u> de la droite d.

<u>Théorème</u> : Toute droite d du plan $\mathbb{P}$ est représentée dans un repère $\mathcal{B} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par une équation de la forme : $ax + by + c = 0$

où $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$

et $(a; b) \neq (0; 0)$

et réciproquement.

(H) $\mathcal{B} = (O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ et une droite $d \subset \mathbb{P}$

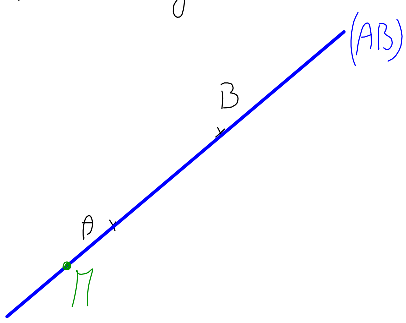
et $d = (AB)$ où $\{A, B\} \subset \mathbb{P}$

(T) $\exists \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que

$M(x, y) \in d \Longrightarrow ax + by + c = 0$

(D) On a :

$M(x, y) \in d$



$\Longleftrightarrow M, A, B$ alignés

$\overset{\text{thm.}}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ colin.

$\overset{\text{thm 14}}{\Longleftrightarrow} \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$$\overset{\text{alg.}}{\Longleftrightarrow} \begin{vmatrix} (x - a_1) & (b_1 - a_1) \\ (y - a_2) & (b_2 - a_2) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{et } \begin{matrix} A(a_1; a_2) \\ B(b_1; b_2) \end{matrix} \quad A \neq B$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \overrightarrow{AM} & \overrightarrow{AB} \end{array}$$

$\Longleftrightarrow (x - a_1)(b_2 - a_2) - (y - a_2)(b_1 - a_1) = 0$

$\Longleftrightarrow \underbrace{(b_2 - a_2)}_{=a} x + \underbrace{(a_1 - b_1)}_{=b} y + \underbrace{(-a_1 b_2 + \cancel{a_1 a_2} + a_2 b_1 - \cancel{a_1 a_2})}_{c} = 0$

$\Longrightarrow \exists \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ tel que

$M(x, y) \in d \Rightarrow ax + by + c = 0$

et $(a, b) \neq (0, 0)$

cqfd

réciproquement :

Théorème

réciproquement : (H) $\mathcal{B}=(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

$\{a;b;c\}\subset\mathbb{R}$ et $(a;b)\neq(0,0)$

et l'ensemble $E=\{P(x;y)\in\mathbb{P} \mid ax+by+c=0\}$

(T) E est une droite du plan $\mathbb{P}$

(D) Soit $b\neq 0$ par (H)

et $A\left(0;\frac{-c}{b}\right)\in E$

et $M\left(x;\frac{-ax-c}{b}\right)\in E$ car $ax+by+c=0$

$\Leftrightarrow y=\frac{-ax-c}{b}$

d'où $\overrightarrow{OM}\overset{\text{déf.}}{=}\begin{pmatrix} x \\ \frac{-ax-c}{b}\end{pmatrix}$

(thm exe 58) $=\begin{pmatrix} x \\ \frac{-ax}{b}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-c}{b}\end{pmatrix}$

$=x\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b}\end{pmatrix}$

$=x\cdot\vec{d}+\overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{d}+\overrightarrow{OA}$ et $\vec{d}=\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AO}=x\cdot\overrightarrow{OB}$ (U_2 ev) et $B\left(1;-\frac{a}{b}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=x\cdot\overrightarrow{OB}$ (Charles)

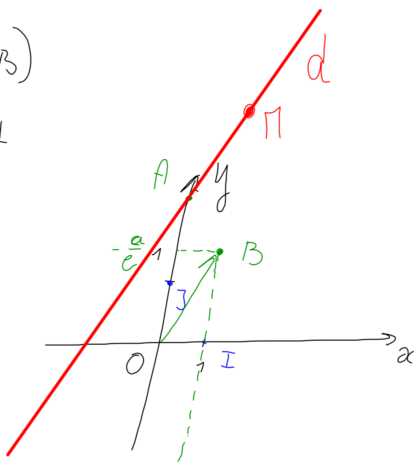
$\overset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow}$ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{OB}$ colinéaires

$\overset{\text{thm.17}}{\Leftrightarrow}$ $(AM)\parallel(OB)$

$\Leftrightarrow M\in d$ et

$d\ni A$

$d\parallel(OB)$



$\Longrightarrow E=d$

cqfd

<u>Exercice</u> : cf l'exercice 66

Soit $A(1\,;2)$ et $B(-3\,;-1)$ et $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$

Calculer une équation cartésienne de la droite (AB) :

<u>On a</u> : $M(x\,;y) \in (AB)$

$\iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} (x-1) & -4 \\ (y-2) & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\iff (-3)(x-1) + 4(y-2) = 0$

$\iff -3x + 3 + 4y - 8 = 0$

$\iff \boxed{-3x + 4y - 5 = 0}$ équation cartésienne de la droite (AB)

* Reprenons les questions de l'exercice 66 :

* $E(3\,;3) \in (AB) \iff$

$-3\cancel{x} + 4\cancel{y} - 5 = 0 \iff -2 = 0$

donc $E \notin (AB)$ ⊛ remarque :

* Calculer x si $M(x\,;0) \in (AB)$:

On a : $-3\cancel{x} + 4\cancel{y} - 5 = 0$

$\iff x = \frac{-5}{3}$

* idem pour les questions.

Pièces jointes

- cours-chap3-280420.fig
- repere-coordonnees.fig