Exercices

56 *Si* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base de* $\mathcal{V}_2$*, quelles sont les composantes de* $\vec{u}$*, de* $\vec{v}$*, de* $\vec{0}$*, de* $-\vec{v}$ *et celles de* $\vec{u}-\vec{v}$*?* $(\vec{v}, \vec{u})$ *est-il aussi une base de* $\mathcal{V}_2$*?*

57 *Si* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base de* $\mathcal{V}_2$, $\vec{t} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{s} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$*, donner les composantes de* $\vec{a} = \vec{t} + \vec{s}$ *et de* $\vec{b} = 2\vec{t} - 3\vec{s}$*. Si* $\vec{w} = \begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$*,* $\vec{t}$ *et* $\vec{w}$ *sont-ils colinéaires? Et* $\vec{s}$ *et* $\vec{w}$*?*

58 *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$*, si* $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$*, montrer que* $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ *et* $\alpha\vec{u} = \begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}$

59 *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$*, on donne* $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\10\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}-10\\25\end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}$*. A-t-on* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *colinéaires? Même question pour* $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$*,* $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$*. Comment choisir* x *si* $\vec{u}$ *et* $\vec{t}$ *sont colinéaires, si* $\vec{v}$ *et* $\vec{t}$ *non colinéaires?*

59 *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$, *on donne* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$. *A-t-on* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *colinéaires? Même question pour* $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$. *Comment choisir* x *si* $\vec{u}$ *et* $\vec{t}$ *sont colinéaires, si* $\vec{v}$ *et* $\vec{t}$ *non colinéaires?*

59 *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$, *on donne* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$. *A-t-on* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *colinéaires? Même question pour* $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$. *Comment choisir* x *si* $\vec{u}$ *et* $\vec{t}$ *sont colinéaires, si* $\vec{v}$ *et* $\vec{t}$ *non colinéaires?*

Données : $\begin{cases} * \ \mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}) \\ * \ \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \end{pmatrix} \\ \text{et } \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \end{cases}$

1) A-t-on $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires ?

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colin $\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ t.q $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha \\ 10\alpha \end{pmatrix}$

corollaire 13 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -3\alpha \\ \text{et} \\ -5 = 10\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-2}{3} \\ \text{et} \\ \alpha = \frac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in \emptyset$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

2) $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires car $\vec{w} = -5 \cdot \vec{u}$.

3) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ colin. ?

Non car : $\left.\begin{array}{l} \vec{u} \text{ et } \vec{w} \text{ colinéaires} \\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non colin.} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{par définition}}$

$\vec{v}$ et $\vec{w}$ non colinéaires.

4) $\vec{u}$ et $\vec{t}$ colinéaires $\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ telque $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{t}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \alpha \\ \text{et} \\ -5 = \alpha \cdot x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \text{et} \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$ d'où $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

THEOREME 14 Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$.

(H) $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

(T) $\vec{u}, \vec{v}$ colinéaires $\Longleftrightarrow xy' - x'y = 0$

Truc mnémotechnique :

$$xy' - x'y = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \text{dét}(\vec{u}, \vec{v})$$

THEOREME 14 Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$.

(H) $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

(T) $\vec{u}, \vec{v}$ colin. $\Longleftrightarrow \text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'.y = 0$

(D) $\Longrightarrow$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ colinéaires

$$\overset{\text{déf.}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \overset{\text{Thm.}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = \alpha x' \\ \text{et} \\ y = \alpha . y' \end{cases} (*)$$

ainsi : $\text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

$\overset{(*)}{=} (\alpha x').y' - x'.(\alpha y') = 0$

$= \alpha x'y' - \alpha x'y'$

cqfd

<u>Réciproquement :</u> $\Leftarrow$

Si $\det(\vec{u},\vec{v})=0$, alors $\vec{u},\vec{v}$ colinéaires

Soit $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$

$\Longrightarrow xy' = x'y \Longrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \text{ et } y' = \dfrac{x'y}{x} \text{ et} \dots \\ \text{ou} \\ \underline{x=0} \text{ et } \underline{x'=0} \end{cases}$

et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix}$ colinéaires

ou $\underline{y=0}$ et $\vec{u}=\vec{0}$

et $\vec{u},\vec{v}$ colin.

$\dots$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ \dfrac{x'y}{x} \end{pmatrix}$

$= \left(\dfrac{x'}{x}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\dfrac{x'}{x}\right) \cdot \vec{u}$

et $\vec{v},\vec{u}$ colinéaires

cqfd

59 *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$, *on donne* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$. *A-t-on* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *colinéaires? Même question pour* $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$. *Comment choisir* x *si* $\vec{u}$ *et* $\vec{t}$ *sont colinéaires, si* $\vec{v}$ *et* $\vec{t}$ *non colinéaires?*

exe 59 : $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \end{pmatrix}$

Soit $\det(\vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} -3 & -10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}$

$= (-3)\cdot(25) - 10\cdot(-10)$

$= -75 + 100 = 25 \neq 0$

donc $\vec{v}, \vec{w}$ non colinéaires

* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$ colinéaires ?

Non, car $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 15$

$= 5 \neq 0$

pour mardi 28 :

- refaire la dernière question de l'exercice 59 mais avec le théorème 14
- faire exe 60 a et b
- faire exe 61

Exercices

60 *Si* $(\vec{i}, \vec{j})$ *est une base de* $\mathcal{V}_2$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$:

a) *écrire* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *comme combinaison linéaire de* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$;

b) *a-t-on* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *respectivement* $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$ *colinéaires?*

~~c)~~ *si* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base de* $\mathcal{V}_2$, *déterminer les composantes de* $\vec{i}$ *dans la base* $(\vec{u}, \vec{v})$.

Quelles sont les composantes de $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{u}, \vec{v})$?

61 *Déterminer* x *si* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sont colinéaires. Peut-on trouver* y *si* $\vec{s} = \begin{pmatrix} y + 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ y + 2 \end{pmatrix}$ *sont deux vecteurs colinéaires? Trouver* z *si* $\vec{a} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ z \end{pmatrix}$ *sont colinéaires.*