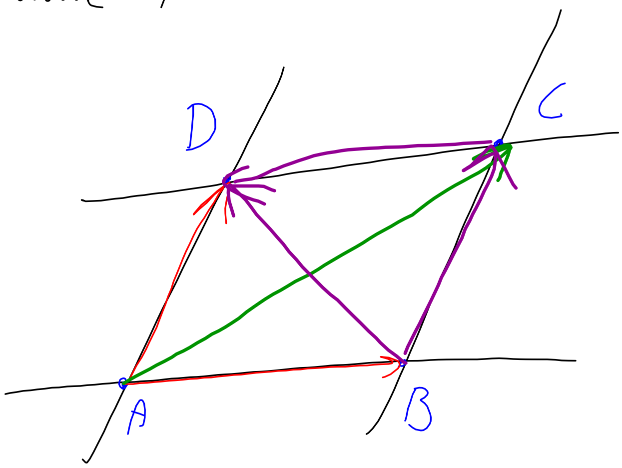
exercice:

Soit un parallélogramme ABCD :

et une base de V_2 :

$\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$



alors

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 1 \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$

$= 1 \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

$= 1 \cdot \overrightarrow{AD} + (-1) \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AD}$

Exercices

56 *Si* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base de* $\mathcal{V}_2$, *quelles sont les composantes de* $\vec{u}$, *de* $\vec{v}$, *de* $\vec{0}$, *de* $-\vec{v}$ *et celles de* $\vec{u} - \vec{v}$? $(\vec{v}, \vec{u})$ *est-il aussi une base de* $\mathcal{V}_2$?

57 *Si* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base de* $\mathcal{V}_2$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, *donner les composantes de* $\vec{a} = \vec{t} + \vec{s}$ *et de* $\vec{b} = 2\vec{t} - 3\vec{s}$. *Si* $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{t}$ *et* $\vec{w}$ *sont-ils colinéaires? Et* $\vec{s}$ *et* $\vec{w}$?

58 *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$, *si* $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, *montrer que* $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ *et* $\alpha \vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$

59 *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$, *on donne* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$. *A-t-on* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *colinéaires? Même question pour* $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$. *Comment choisir* x *si* $\vec{u}$ *et* $\vec{t}$ *sont colinéaires, si* $\vec{v}$ *et* $\vec{t}$ *non colinéaires?*

56 *Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, quelles sont les composantes de $\vec{u}$, de $\vec{v}$, de $\vec{0}$, de $-\vec{v}$ et celles de $\vec{u}-\vec{v}$? $(\vec{v}, \vec{u})$ est-il aussi une base de $\mathcal{V}_2$?*

<u>Données</u> : * $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$

Alors : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v}$

$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v}$

$-\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}$

$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}$

* Données : * $\mathcal{B}_2 = (\vec{v}, \vec{u})$

On a bien $\mathcal{B}_2$ une base car $\mathcal{B}_1$ l'est.

Alors : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

57 Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}_2$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, donner les composantes de $\vec{a} = \vec{t} + \vec{s}$ et de $\vec{b} = 2\vec{t} - 3\vec{s}$. Si $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{t}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires? Et $\vec{s}$ et $\vec{w}$?

Données : $\begin{cases} * \ \mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}) \\ * \ \vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

Résolution : * calculer les composantes de $\vec{a} = \vec{t} + \vec{s}$

On a : $\vec{a} = \vec{t} + \vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} =$

$(3 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v}) + ((-1) \cdot \vec{u} + 4 \cdot \vec{v}) =$) EV

$= (3 + (-1)) \cdot \vec{u} + (1 + 4) \cdot \vec{v}$

$= \begin{pmatrix} 3 + (-1) \\ 1 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

* $\vec{b} = 2 \cdot \vec{t} - 3\vec{s} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$= 2(3\vec{u} + \vec{v}) - 3(-\vec{u} + 4\vec{v})$) EV

$= 6\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{u} - 12\vec{v}$) EV

$= (6+3)\vec{u} + (2-12) \cdot \vec{v}$

$= 9\vec{u} - 10\vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix}$

57 *Si* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base de* $\mathcal{V}_2$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, *donner les composantes de* $\vec{a} = \vec{t} + \vec{s}$ *et de* $\vec{b} = 2\vec{t} - 3\vec{s}$. *Si* $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{t}$ *et* $\vec{w}$ *sont-ils colinéaires? Et* $\vec{s}$ *et* $\vec{w}$?

Données: $\begin{cases} * \ \mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}) \\ * \ \vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

Calculer les composantes de $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \vec{t} + \vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + (-1) \\ 1 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De même pour $\vec{b}$:

$$\vec{b} = 2 \cdot \vec{t} - 3 \cdot \vec{s} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+3 \\ 2-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix}$$

preuve cf exe 58

* Soit le vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

* a-t-on $\vec{w}$ et $\vec{t}$ colinéaires ?

oui car $\vec{w} = (-2) \cdot \vec{t}$

* a-t-on $\vec{w}$ et $\vec{s}$ colinéaires ?

non car $\nexists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{s}$

en effet si oui :

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{s}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 4\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 = -\alpha \\ \text{et} \\ -2 = 4\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 6 \\ \text{et} \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in \emptyset$$

58 *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$, *si* $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, *montrer que* $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ *et* $\alpha \vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$

H $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

T a) $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

e) $\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$

D

a) $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =: \left(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}\right) + \left(x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j}\right)$

$\underset{=}{U_2\,ew} \left(x\vec{i} + x' \cdot \vec{i}\right) + \left(y \cdot \vec{j} + y' \cdot \vec{j}\right)$

$\underset{=}{U_2\,ew} \left(x + x'\right)\vec{i} + \left(y + y'\right)\vec{j} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

e) $\alpha \vec{u} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$U_2\,ew \left\{ \begin{array}{l} =: \alpha \cdot \left(x\vec{i} + y \cdot \vec{j}\right) = \alpha\left(x\vec{i}\right) + \alpha \cdot \left(y \cdot \vec{j}\right) \\ = (\alpha x) \cdot \vec{i} + (\alpha \cdot y)\,\vec{j} =: \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \end{array} \right.$ cqfd

59 *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$, *on donne* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$. *A-t-on* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *colinéaires? Même question pour* $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$. *Comment choisir* x *si* $\vec{u}$ *et* $\vec{t}$ *sont colinéaires, si* $\vec{v}$ *et* $\vec{t}$ *non colinéaires?*