4 Base de $\mathcal{V}_2$ On entre en "géométrie analytique"

Définition 9 Deux vecteurs sont **colinéaires** si et seulement si l'un est multiple de l'autre.

remarque : Deux vecteurs colinéaires sont de même direction.

suite

THEOREME 11	Il existe au moins deux vecteurs non colinéaires dans $\mathcal{V}_2$.

(H) $(\mathcal{V}_2, +, \cdot)$

(T) $\exists \{\vec{u}, \vec{v}\} \subset \mathcal{V}_2$ tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

(D) on démontre cela "par l'absurde" :

Soit nos (H) et une nouvelle hypothèse "absurde" : la non(T)

On raisonne :

On a la "non(T)" : tous les vecteurs pris 2 à 2 sont colinéaires (hyp. absurde)

Mais, dans l'axiome (1) de la géométrie euclidienne, il est écrit : ...

or si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, alors A, B et C ((H)) sont alignés, donc tous les points du plan "$\mathbb{P}$" sont alignés et $\mathbb{P}$ est une droite, ce qui contredit l'axiome (1) de la géom. euclidienne.

Donc la "non(T)" est fausse, et la (T) est vraie

cqfd

suite

AXIOME DU PLAN (Pour l'usage du papier ou du tableau noir, et du crayon)

On dispose d'un ensemble $\mathbb{P}$ appelé plan, dont les éléments se nomment points, et dont certains sous-ensembles d, appelés droites, sont distincts de $\mathbb{P}$ et comprennent au moins deux points.

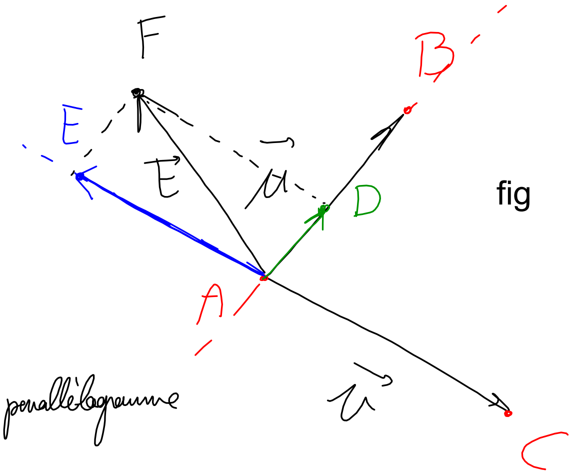
retour

~~Définition~~ 10 Deux vecteurs non colinéaires sont aussi dits **linéairement ~~indépendants~~.**

Définition 11 On appelle **combinaison linéaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\vec{t}$ tel que

$\vec{t} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$, où $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$

$$\vec{t} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$$
$$= \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$
$$= \overrightarrow{AF} \quad \text{où } ADFE \text{ parallélogramme}$$



fig

suite

THEOREME 13 Tout vecteur de $\mathcal{V}_2$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de deux vecteurs ~~linéairement indépendants~~ de $\mathcal{V}_2$.

non colinéaires

H $\{\vec{u}, \vec{v}\} \subset \mathcal{V}_2$ et $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires

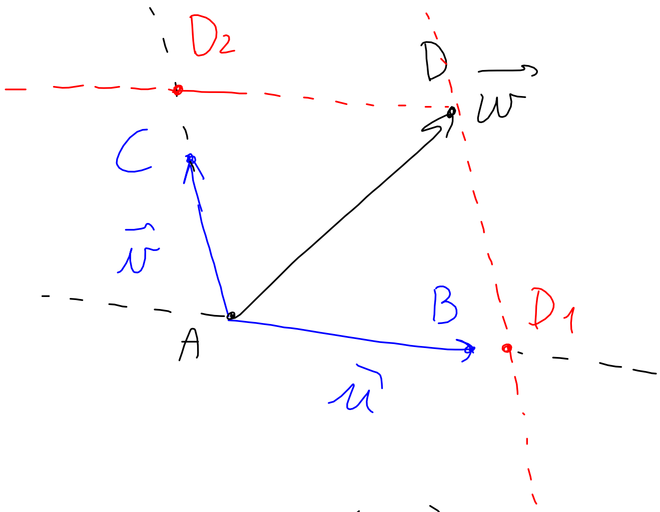
T $\forall \vec{w} \in \mathcal{V}_2$, $\exists! \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$ t.que $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$

D . . . . . . suite

D) 1) existence :

Soit $\vec{w} \in V_2$

et $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires



Soit $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$

et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Soit $D_1 = p_{(AC)}(D) \in (AB)$

$D_2 = p_{(AB)}(D) \in (AC)$

Donc AD_1DD_2 est un parallélogramme

et $\overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{AD}$

Mais A, B, D_1 sont alignés } par construction
et A, C, D_2 sont alignés }

$\Leftrightarrow$ $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ telque $\overrightarrow{AD_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$

et $\exists \beta \in \mathbb{R}$ telque $\overrightarrow{AD_2} = \beta \cdot \overrightarrow{AC}$

d'où $\overrightarrow{AD} = \dots$ suite d'où $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AD_2}$

$= \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$

suite $\Leftarrow$ $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$

2) unicité : Soit $\vec{w} = \alpha_1 \cdot \vec{u} + \beta_1 \cdot \vec{v}$

et $\vec{w} = \alpha_2 \cdot \vec{u} + \beta_2 \cdot \vec{v}$

donc : $\alpha_1 \cdot \vec{u} + \beta_1 \cdot \vec{v} = (\vec{w} =) \alpha_2 \cdot \vec{u} + \beta_2 \cdot \vec{v}$

$\Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \vec{u} + \beta_1 \cdot \vec{v} = \alpha_2 \cdot \vec{u} + \beta_2 \cdot \vec{v}$

$\Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \vec{u} + \beta_1 \vec{v} - \alpha_2 \vec{u} - \beta_2 \vec{v} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \vec{u} + (\beta_1 - \beta_2) \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$(V_2, +, \cdot)$ E.V.

thm 12

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \text{et} \\ \beta_1 - \beta_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \text{et} \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$ cqfd

suite

THEOREME 12	Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires si et seulement si $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$.

retour

non colinéaires

Définition 12 Une **base** de $\mathcal{V}_2$ est un couple de vecteurs ~~linéairement indépendants~~.

Définition 13 Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}_2$ et $\vec{t} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$, alors x et y s'appellent respectivement première et seconde **composantes** de $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Notation: $\vec{t} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base donnée.

$= x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$

COROLLAIRE Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes composantes respectives dans la même base.

suite Conséquence évidente du thm 13.

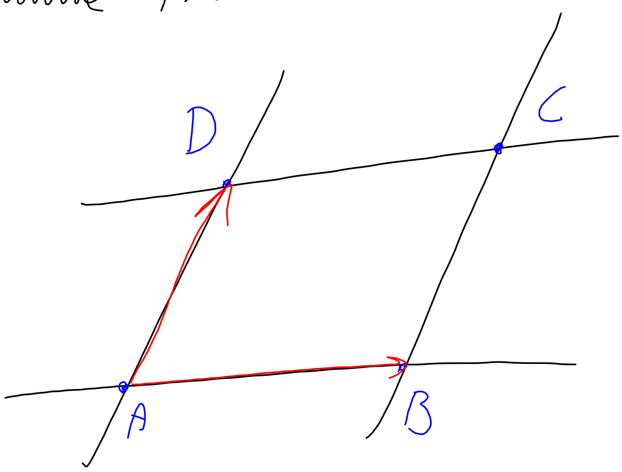
<u>exercice</u>:

Soit un parallélogramme ABCD :

et une base de V_2 :

$\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

alors



$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} \; \\ \; \end{pmatrix}$? $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \; \\ \; \end{pmatrix}$?

$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} \; \\ \; \end{pmatrix}$?

Exercices

56 *Si* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base de* $\mathcal{V}_2$, *quelles sont les composantes de* $\vec{u}$, *de* $\vec{v}$, *de* $\vec{0}$, *de* $-\vec{v}$ *et celles de* $\vec{u}-\vec{v}$? $(\vec{v}, \vec{u})$ *est-il aussi une base de* $\mathcal{V}_2$?

57 *Si* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base de* $\mathcal{V}_2$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, *donner les composantes de* $\vec{a} = \vec{t} + \vec{s}$ *et de* $\vec{b} = 2\vec{t} - 3\vec{s}$. *Si* $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{t}$ *et* $\vec{w}$ *sont-ils colinéaires? Et* $\vec{s}$ *et* $\vec{w}$?

58 *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$, *si* $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, *montrer que* $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ *et* $\alpha\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$

59 *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$, *on donne* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$. *A-t-on* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *colinéaires? Même question pour* $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$. *Comment choisir* x *si* $\vec{u}$ *et* $\vec{t}$ *sont colinéaires, si* $\vec{v}$ *et* $\vec{t}$ *non colinéaires?*