2. Méthode de l'angle auxiliaire

Il existe deux variantes à cette méthode. Voici la première. L'équation proposée :
$a \cos x + b \sin x = c$
peut s'écrire, après division des deux membres par $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x = \frac{+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Comme on a :

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$$

et : $$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1\ ,$$

on peut poser :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi \quad \text{et} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi\,;$$

L'équation proposée s'écrit alors :

$$\cos\varphi \cos x + \sin\varphi \sin x = \frac{+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

c'est-à-dire :

$$\cos(x-\varphi) = \frac{+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Si $-1 \leqslant \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant +1$, on peut poser : $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$, de sorte que l'équation proposée s'écrit finalement :

$$\cos(x-\varphi) = \cos\alpha.$$

La résolution de cette équation fondamentale donne :

$$x - \varphi = \pm\alpha + k \cdot 2\pi$$

soit :

$$\underline{x = \varphi \pm \alpha + k \cdot 2\pi}$$

Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 1$ ou $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} < -1$, l'équation $\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ est impossible.

EXEMPLE

Reprenons l'équation $3 \cos x + 5 \sin x = 2$.
On écrit :

$$\frac{3}{\sqrt{34}} \cos x + \frac{5}{\sqrt{34}} \sin x = \frac{2}{\sqrt{34}}$$

On a : $\frac{3}{\sqrt{34}} = \cos 1{,}03$; $\frac{5}{\sqrt{34}} = \sin 1{,}03$; $\frac{2}{\sqrt{34}} = \cos 1{,}22$.

L'équation proposée devient : $\cos(x - 1{,}03) = \cos 1{,}22$

Les solutions en sont :

$$x = 2{,}03 + 1{,}22 + k \cdot 2\pi = 2{,}25 + k \cdot 6{,}28$$

$$x = 1{,}03 - 1{,}22 + k \cdot 2\pi = -0{,}19 + k \cdot 6{,}28$$

Il existe une deuxième variante pour la résolution d'une équation linéaire par la méthode de l'angle auxiliaire. Montrons-la sur le même exemple que précédemment, x étant cette fois une mesure en degrés décimaux

$$3 \cos x° + 5 \sin x° = 2$$

Divisons les deux membres par 3 ; il vient :

$$\cos x° + \frac{5}{3} \sin x° = \frac{2}{3}.$$

Les tables donnent : $\frac{5}{3} = \operatorname{tg} 59{,}04° = \frac{\sin 59{,}04°}{\cos 59{,}04°}$ et aussi $\cos 59{,}04° = 0{,}51450$

Multiplions maintenant les deux membres par $\cos 59{,}04°$; il vient :

$$\cos x° \cdot \cos 59{,}04° + \sin x° \cdot \sin 59{,}04° = \frac{2}{3} \cos 59{,}04° = 0{,}34300$$

soit :

$$\cos (x - 59{,}04)° = \cos 69{,}94°.$$

On en tire :

$$x - 59{,}04 = \pm 69{,}94 + k \cdot 360$$

d'où :

$$\underline{x = 128{,}98 + k \cdot 360}$$

$$\underline{x = -10{,}90 + k \cdot 360 = 349{,}10 + k \cdot 360}$$

NOTE

Par la méthode algébrique, on avait trouvé $x = 129{,}97$ et $x = 349{,}15$.

3. Méthode graphique

Si l'on pose $\cos x = X$ et $\sin x = Y$, l'équation proposée $a \cos x + b \sin x = c$ s'écrit :

$$a X + b Y - c = 0.$$

Par ailleurs, la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ fournit $X^2 + Y^2 = 1$.

Résoudre l'équation proposée revient donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} a X + b Y + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

dont les solutions sont les coordonnées, dans un repère orthonormé, des points d'intersection éventuels du cercle de centre O et de rayon 1 (cercle trigonométrique) avec la droite d'équation $a X + b Y - c = 0$, que l'on détermine par deux de ses points.

Les solutions sont alors directement lues sur le graphique. Notons que l'intérêt de la méthode graphique vient de sa rapidité à fournir un ordre de grandeur, à 1° près aisément.

A titre d'exemple, traitons les équations :

$$3 \cos x° + 5 \sin x° - 2 = 0$$

et : $$0{,}4 \cos x° + \sin x° + 1{,}6 = 0$$

D'après le graphique ci-après, la première équation admet sur l'intervalle $[0,360[$ les deux solutions :

x = 349 (valeur approchée à 1° près)

x = 129 (id.)

La seconde équation est impossible, car la droite d'équation $0{,}4\,X + Y + 1{,}6 = 0$ ne coupe pas le cercle trigonométrique.

La droite $3\,X + 5\,Y - 2 = 0$ est déterminée par les points $A \left| \begin{matrix} 0 \\ 0{,}4 \end{matrix} \right.$ et $B \left| \begin{matrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \end{matrix} \right.$

La droite $0{,}4\,X + Y + 1{,}6 = 0$ est déterminée par les points $C \left| \begin{matrix} 0 \\ -1{,}6 \end{matrix} \right.$ et $D \left| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right.$