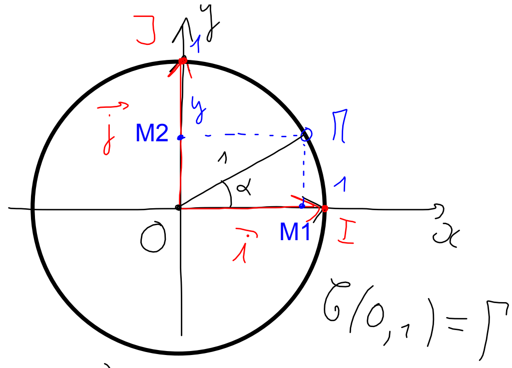
§3 Fonctions trigonométriques sinus et cosinus

Soit un repère orthonormé $\mathcal{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ R.O.N

et le cercle $\mathcal{C}(O, 1) = \Gamma$

(le cercle trigonométrique)

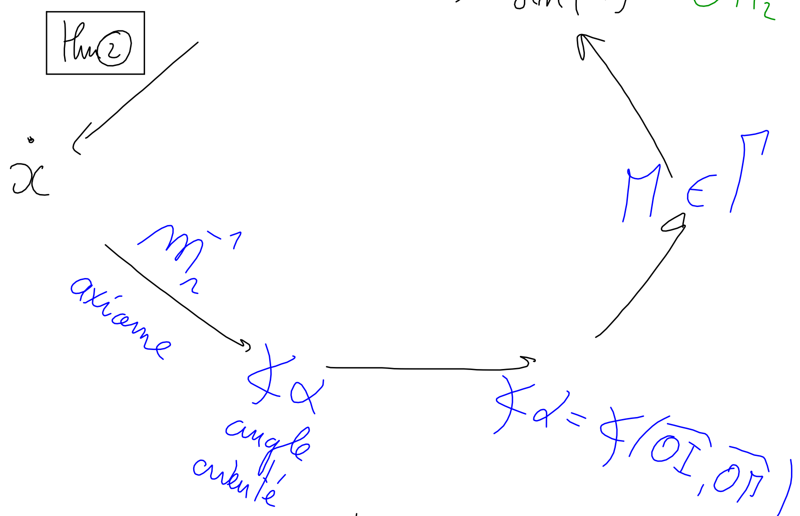


et $M \in \Gamma$ et $\measuredangle \alpha = \measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$

On va définir 2 fonctions, appelées sinus et cosinus, notée respectivement "sin" et "cos"

Ainsi : $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$

$x \longmapsto \sin(x) = \overline{OM_2}$



De même on définit la fonction cosinus notée "cos" :

$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$

$x \longmapsto \cos(x) = \overline{OM_1}$

suite

où $M_1 = p_\perp(M) \in (OI)$

THEOREME 2 Les relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ définies dans l'ensemble des nombres réels par

$x \, \mathcal{R}_1 \, y \iff x = y + k\,360$ et $k \in \mathbb{Z}$ (modulo 360) et

$x \, \mathcal{R}_2 \, y \iff x = y + k\,2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ (modulo 2π)

sont des relations d'équivalence.

retour

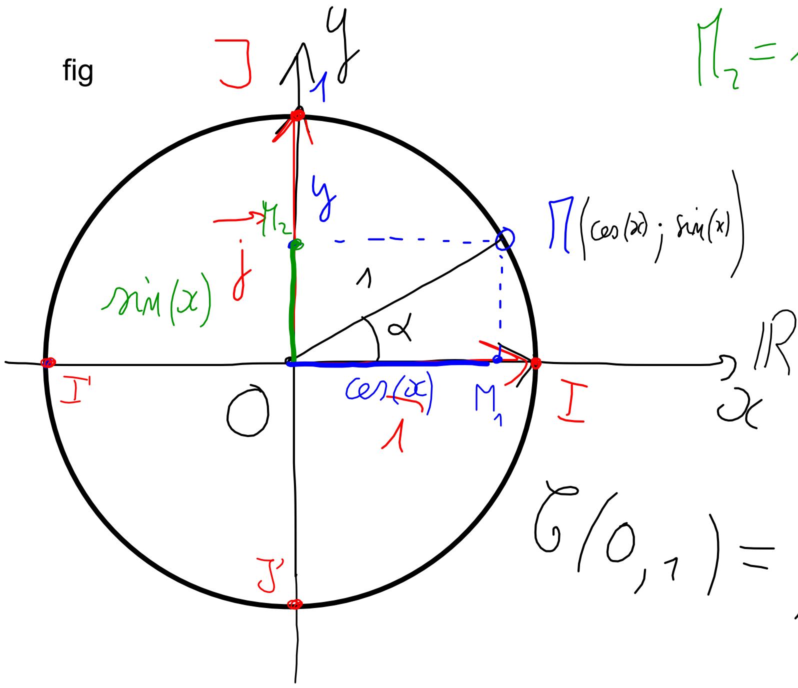
9 *Si l'on note* $\mathscr{A}_+$ *l'ensemble des angles orientés positivement auquel on a ajouté l'angle nul, démontrer que* $m_{rad} : \mathscr{A}_+ \rightarrow \mathbb{R} / 2\pi$ *est une bijection.*

10 *Si* $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *est d'orientation directe, démontrer que*

$m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})) = -m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}))$.

retour

fig



$M_2 = p_\perp(M) \in (OJ)$

$\sin(x) = \overline{OM_2}$

$\cos(x) = \overline{OM_1}$

$M_1 = p_\perp(M) \in (OI)$

$\mathcal{C}(O,1) = \Gamma$

Relations entre fonctions trigonométriques d'un même arc

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$	$\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$\cot(\alpha) = \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
$\cot(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$	$\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$	$\dfrac{1}{\sin^2(\alpha)} = 1 + \cot^2(\alpha)$

retour

* Formules immédiates de trigonométrie :

(les 5 de base cf F. T. page 29)

1) (H) $x \in \mathbb{R}$

(T) $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$

$\sphericalangle x$

(D) On a $\boxed{x \in \mathbb{R}}$ et $x = m_r(\sphericalangle(\overline{OI}, \overline{OM}))$

et $M \in \Gamma$ et $\cos(x) =: \overline{OM_1}$, $M_1 = p_\perp(M) \in (OI)$

et $\sin(x) =: \overline{OM_2}$ où $M_2 = p_\perp(M) \in (OJ)$

et ainsi $\cos(x)$ est l'abscisse de M

$\sin(x)$ est l'ordonnée de M

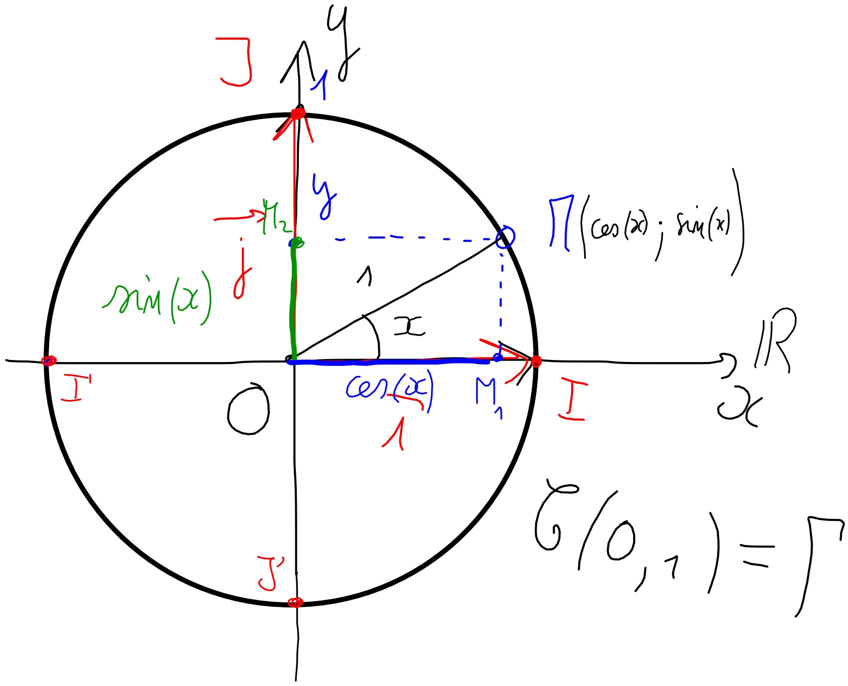
et $M \in \Gamma = \mathcal{C}(O,1) \Longrightarrow (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$

cqfd

suite

Notation : $(\cos(x))^2 = \cos^2(x)$

retour


J
y
1
y
M_2
$M(\cos(x) ; \sin(x))$
$\sin(x)$
j
1
x
$\mathbb{R}$
I
O
$\cos(x)$
M_1
I
x
1
$\mathcal{C}(O, 1) = \Gamma$
J'

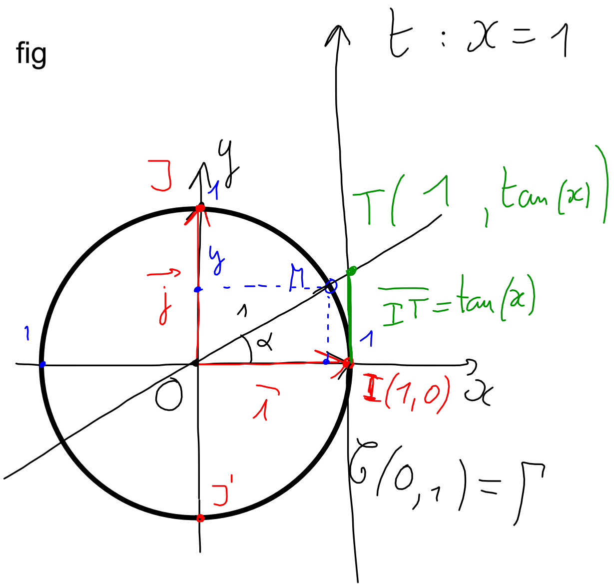
* La fonction tangente : notée "tan"

Soit $\tan : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \tan(x)$

où $\tan(x) = \overline{IT}$ avec $T \in t \cap (OM)$

fig



Soit la droite

$t = (I, \vec{j})$

alors

$\tan(x) = \overline{IT}$

où $T \in t \cap (OM)$

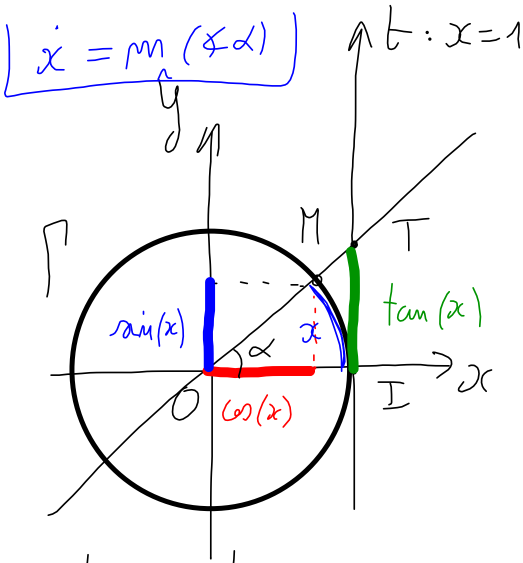
⚠ si $M = J$, alors $\tan(x) \notin \mathbb{R}$

⚠ si $M = J'$, alors $\tan(x) \notin \mathbb{R}$

Théorème :

(H) $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

(T) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$



(D) Soit $M \in \Gamma$

et $T \in (OM) \cap t$ où t est l'axe des tangentes

avec $O(0,0)$, $M(\cos(x), \sin(x))$ et $T(1, \tan(x))$

alignés.

donc $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OT}$ colinéaires

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OT}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \cos(x) & 1 \\ \sin(x) & \tan(x) \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \cos(x) \cdot \tan(x) - \sin(x) = 0$

$\overset{(H)}{\Leftrightarrow} \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ cqfd

Pièces jointes

- cercle trigo-1.fig
- Histoire du degre.pdf
- radian.fig
- cercle trigo-2.fig
- cercle trigo-3.fig